Лекция 5. Философские проблемы современной математики.

1. Философские основания математики
   1.1 Философия и математика
   1.2 Проблема оснований и обоснования математики
   1.3 Проблема математического объекта
   1.4 Рациональное и иррациональное в математике
2. Специфика математического знания
   2.1 Становление и развитие математической науки
   2.2 Структура математического знания
   2.3 Специфика математического познания

Введение

Матема́тика (от др. греч. Μάθημα — изучение, наука) – это наука о структурах, порядке и отношениях, которая исторически сложилась на основе операций подсчёта, измерения и описания форм реальных объектов. Математические объекты создаются путём идеализации свойств реальных или других математических объектов и записи этих свойств на формальном языке. Математика не относится к естественным наукам, но широко используется в них как для точной формулировки их содержания, так и для получения новых результатов. Математика является языком науки, который обеспечивает взаимосвязь различных наук.

Математика в истории науки всегда занимала особое место: в античности с ней связывался идеал научной истины, понятие математики служили основой для развития других наук и закладывались как принципы искусства. На протяжении всего развития математическое знание трактовалось как чистая деятельность мышления, как строгое и беспристрастное выведение заключений из аксиом

Роль математики в современной науке постоянно возрастает, так как без математического описания явлений действительности трудно их глубоко понять и освоить. Так же развитие наук, особенно технических предполагает использование математического аппарата. Без его разработки и использования, невозможно ни освоение космоса, ни создание электронно-вычислительных машин, нашедших применение в самых различных областях человеческой деятельности.

Современная математика наряду с абстрактно понимаемыми пространственными формами и количественными отношениями изучает любые отношения между объектами, о которых ничего не известно, кроме некоторых их свойств, описываемых аксиомами. Таким образом, математику принято определять, как науку о всех возможных пространственных формах и количественных отношениях действительного мира, а также о формах и отношениях, которые подобным первым или вторым по степени абстрактности.

Математика своеобразная наука, анализ ее положений очень сложен. И не смотря на то, что особенности математического знания были предметом внимания выдающихся философов всех времен и народов, многие методологические проблемы математически остаются недостаточно разработанными, что в свою очередь тормозит развитие, как самой математики, так и других наук, в том числе и философии.

Математики много раз меняли представление о своей науке под давлением определенных фактов, которые заставляли их отказаться от устоявшихся привычных точках зрений. Современное понимание математики требует исследования истории математики, ее структуры, функции, отношение к другим наукам.

Понимание математики и ее взаимоотношения с объективным миром неразрывно связано с решением вопроса о том, почему математика вообще оказывается применима к реальному миру? Только ответив на этот вопрос о происхождении и содержании математических понятий и теорий, можно разрабатывать остальные философские вопросы математики.

1. Философские основания математики

1.1 Философия и математика

Философия математики - отрасль философии, исследующая природу математических объектов и эпистемологические проблемы математического познания. Философские проблемы математики можно разделить на две основные группы:

1. онтологические и
2. эпистемологические.

Абстрактный характер объектов математики, особая убедительность и неопровержимость ее доказательств еще в античную эпоху привлекли внимание философов к анализу особенностей предмета и метода математики. Тот факт, что ее понятия и суждения независимы от эмпирического опыта, а утверждения обладают весьма высокой степенью достоверности, уже давно стал аргументом в пользу существования независимых от опыта суждений a priori, а математическое знание стало представляться образцом чисто логического развития науки. В связи с этим и возникает основная онтологическая проблема — отношение математики к реальному миру: ***что она в нем изучает и какова природа ее объектов?***

Одной из первых попыток решения этой проблемы стала **концепция математического реализма**, которую часто называют также **платонизмом**. Она постулирует, что математические объекты являются абстрактными, вечными и причинно не связанными с материальными предметами и эмпирическим опытом. Такой взгляд может объяснить, почему математика независима от опыта, а ее истины имеют достоверный характер. Однако как только возникает вопрос о ее приложении к естествознанию и др. конкретным наукам, то ни платонизм, ни позднее возникший реализм не могут удовлетворительно ответить на него.

Близкой по онтологии к реализму или даже его разновидностью является **концепция структурализма**, рассматривающая математику как науку об абстрактных структурах. С этой точки зрения арифметика, например, не является наукой о таких абстрактных объектах, как числа, а скорей — о теоретико-числовых структурах. Наиболее настойчиво структурный взгляд пропагандировали математики, выступавшие под псевдонимом «Н. Бурбаки». Они поставили перед собой амбициозную цель: изложить все математические дисциплины с помощью аксиоматического метода и т. о. представить все существующее математическое знание в виде грандиозной аксиоматической структуры. В качестве основных, или порождающих, структур они выделяют алгебраические, топологические и структуры порядка, путем комбинации которых образуются др. структуры. По своей онтологической природе структуры являются априорными конструкциями, и их совпадение с эмпирической реальностью чисто случайно. «В своей аксиоматической форме математика представляется скоплением абстрактных форм — математических структур, и оказывается (хотя, по существу, и неизвестно почему), что некоторые аспекты экспериментальной действительности как будто в результате предопределения укладываются в некоторые из этих форм» (Н. Бурбаки).

Альтернативными реализму являются **субъективные концепции**, согласно которым содержание математики создается мышлением субъекта. Крайней формой такого субъективизма является убеждение, что существует столько математик, сколько самих математиков, и что даже каждый человек может создавать свою математику. Однако поскольку математическое знание и результаты его применения не зависят от сознания и воли отдельного субъекта, большинство сторонников субъективного подхода вынуждены признать если не объективность, то интерсубъективность математики, т.е. независимость ее результатов от индивидуального сознания. Для оправдания такой интерсубъективности чаще всего обращаются к философии Канта, которая обосновывает общезначимый и необходимый характер математических суждений тем, что объявляет их априорными формами познания, изначально присущими человеку. На эту кантианскую идею опирается и интуиционистская концепция математики, выдвинутая Л.Э.Я. Брауэром: «...Главным в математической деятельности являются умственные построения, осуществляемые на основе непосредственной интуиции, а не язык или логика, посредством которых выражаются результаты этой деятельности». Интуиционисты считают математические объекты существующими тогда, когда они построены, а доказательства фактически проведены.

Другой альтернативой реализму являются представления о математике и ее объекте как **свободных от какой-либо онтологии**. Эти представления варьируются: одни рассматривают математику как особый метод, применимый во многих науках, но не имеющий ни своего содержания, ни собственного предмета исследования, др. предлагают говорить о математических объектах в модальных терминах, т.е. вместо того, чтобы считать их существующими, заявляют о возможности их существования, третьи — вообще объявляют их фикциями, и т.п. Такого рода инструменталистские взгляды не могут объяснить, почему возможные, а тем более фиктивные понятия математики могут применяться в содержательных рассуждениях естествознания, технических и социально-гуманитарных наук.

Широкое распространение получил **конструктивный подход к математике**, сторонники которого, как и интуиционисты, отрицают законность применения в ней актуальной, ставшей бесконечности и вновь возвращаются к бесконечности потенциальной, становящейся. Конструктивисты опираются на более точные определения конструктивных объектов и операций, а также фундаментального понятия алгоритма, служащего основой для построения конструктивной математики. Выдающийся вклад в развитие этой математики внесла отечественная школа ученых во главе с А.А. Марковым. В отличие от интуиционистов, которые рассматривают математику как чисто умозрительную деятельность, связанную с построением математических объектов на «базисной интуиции интеллекта, без обращения к непосредственной применимости» (Брауэр), Марков указывает, что умозрительный характер имеют не сами построения, а наши рассуждения о них, в особенности когда начинают использоваться абстракции.

Эпистемологические проблемы математики тесно связаны с онтологическими, т.к. от понимания ее объектов и предмета исследования зависит оценка методов ее познания. Сторонники платонизма, или реализма, рассматривая абстрактные объекты математики как априорные, неизменные и не связанные с материальным миром, считают основным средством познания интеллектуальную интуицию, не подверженную случайностям опыта. Поскольку при этом математика оказывается изолированной от реального мира и конкретных наук, то некоторые реалисты начинают сближать интеллектуальную интуицию с чувственной.

Структуралисты, особенно эмпирического толка, рассматривают математические структуры как некоторые абстрактные схемы, приближенно верно описывающие свойства и отношения реальных систем, от которых можно отвлечься в математическом исследовании. Хотя сами структуры являются абстрактными, знание о них может быть получено путем анализа реальных систем, в которых они представлены. Такой подход наталкивается, однако, на серьезные трудности, когда приходится иметь дело с наиболее глубокими для математики понятиями, как, напр., «бесконечность», которая не дана в эмпирическом опыте.

Допуская возможность создания таких понятий мышлением субъекта, интуиционисты, на первый взгляд, оправдывают их существование в математике, но не объясняют, как чисто субъективные создания мысли оказываются применимыми для познания реальной действительности. Более адекватно объясняют процесс создания таких далеких от эмпирической действительности понятий, как «бесконечность», сторонники конструктивного направления. Марков убедительно показывает, что подобные понятия создаются с помощью абстракции потенциальной осуществимости построения математических объектов: «Абстракция потенциальной осуществимости позволяет нам рассуждать о сколь угодно длинных конструктивных процессах и сколь угодно больших конструктивных объектах. Их осуществимость потенциальная: они были бы осуществимы практически, располагай мы достаточным пространством, временем и материалом». На основе этой абстракции возникает понятие «потенциальная бесконечность», которое интуиционисты и конструктивисты противопоставляют понятию «актуальная бесконечность» сторонников платонизма и математического реализма, оказывающемуся источником возникновения парадоксов в канторовской теории множеств.

Различие онтологических и эпистемологических подходов в Ф. м. явно выражается и в решении специальных проблем обоснования математики сторонниками разных его направлений. Так, напр., представители платонизма признают существование актуальной бесконечности в математике и поэтому допускают применение в ней закона исключенного третьего и «чистых» (косвенных) доказательств существования. Их оппоненты — интуиционисты и конструктивисты — решительно возражают против этого, поскольку они отвергают актуальную бесконечность и признают лишь бесконечность потенциальную, к которой неприменим закон исключенного третьего, а доказательствами считаются только конструктивные доказательства, где искомый объект либо фактически, либо потенциально может быть построен.

В математической практике объективность и необходимость полученных результатов обычно обосновывается применимостью их в естествознании и др. конкретных науках, ближе стоящих к эмпирической реальности.

Математика прошла долгий и сложный путь развития. Существенные рациональные положения об особенностях исторического развития математического знания содержаться в трудах многих видных философов, математиков и логиков. Математика проникает буквально во все науки. Значительных успехов в математизации своих теорий сегодня достигли такие долго не поддававшиеся ей дисциплины, как биология, геология, медицина, экономика и др.

Философия в сфере математики способствует выработке адекватного понимания математического знания, решению естественно возникающих вопросов о предмете и методах математики, специфике ее понятий. Действительно философское понимание математики может предстать только как сумма выводов, сумма определений, полученных на основе анализа различных ее сторон. Правильное понимание математики не может быть получено умозрительно или путем простого сравнения случаев, которые подходят под известное интуитивное представление, и подыскания затем некоторых объединяющих их признаков. Такой метод необходим для предварительного понимания любого предмета, но сам по себе он недостаточен.

Подобно тому, как основным вопросом философии является вопрос об отношении сознания к материи, стержневым вопросом философии математики является вопрос об отношении понятий математики к объективной реальности, другими словами, вопрос о реальном содержании математического знания. От того, как решает этот фундаментальный вопрос тот или иной ученый, зависит характер освещения им всех остальных методологических проблем математики, а также то, к какому философскому лагерю он примыкает. Прежде чем перейти к освещению вопроса о месте математики в системе науки, необходимо предварительно выявить хотя бы в общих чертах объем, содержание и соотношение таких понятий, как философия, обычные науки, специальные науки, частные науки.

Под обычными науками мы понимаем все науки, за исключением математики, которая является необычной наукой. Термин специальные науки обозначает все науки, включая математику, но исключая, разумеется, философию. Частные же науки это те науки, которые изучают объекты в рамках какой-либо одной формы движения материи (или даже части ее) физика, химия, биология, и т. д. Стало быть, частные науки это специальные науки за вычетом математики. Таким образом, математику, как и философию можно отнести к всеобщим наукам. В самом деле, она считается всеобщей и абстрактной наукой, поскольку математический аппарат в принципе может использоваться и практически используется во всех без исключения областях знания.

Возникает вопрос: в чем же существенной различие между философией и математикой, изучающими одну и ту же реальную действительность? Самый общий ответ на него, заключается в том, что философия и математика используют разные способы описания объективной действительности и соответствующие им языки: в первом случае мы имеем дело с естественным, а во втором случае с искусственным языком, предполагающим формально-логический метод описания действительности. Как известно, философия изучает все явления действительности под углом всеобщих закономерностей и дает, по существу, универсальный метод познания и преобразования природного и социального окружения. При этом философия изучает и количественную (внешнюю), и качественную стороны объектов, анализируя их прежде всего в плане наиболее общих принципов, законов и категорий. Иное дело математика.

Итак, несмотря на одинаково всеобщий характер, философия и математика выполняют различную функцию в познании. При этом философия меньше отличается от частных наук, чем математика, последняя занимает особое положение, иначе «вплетена» в ткань науки, чем философия и любая другая наука.

Поподробнее обратимся к функциям математики и философии. Мировоззренческая функция философии обусловлена тем, что она является основой научной картины мира, в создание которой свой посильный вклад вносит, конечно, каждая специальная наука. Являясь итогом общественно-исторической практики и познания, философия в этом смысле выступает в качестве фундамента всего здания науки. Кроме того, философия как система дисциплин обусловливает формирование у человека необходимых ценностных ориентаций, имеет огромное воспитательное значение, являясь не только наукой, но и особой формой общественного сознания идеологией. Философия является не только основой мировоззрения, но и всеобщим методом познания. Отсюда методологическая функция философии. Подобно тому как в системе наук философия выполняет роль стеежня всего знания, она является и всеобщим методом познания и преобразования действительности: системе наук и их субординации соответствует, таким образом, система и субординация методов. Философия выполняет по отношению ко всем частным наукам также теоретико-познавательную функцию. Это очевидно уже потому, что теория познания является одной из относительно самостоятельных дисциплин, в которой изучаются формы и методы научного познания, структура и уровни его, критерий истины.

Наконец философия в целом, материалистическая диалектика в особенности, выполняет по отношению ко всем остальным наукам логическую функцию. Ни один специалист не может успешно вести исследования, обобщать и объяснять полученные результаты, не используя философских понятий и представлений. Таким образом, философские принципы имеют огромное методологическое значение, обладают большой эвристической силой, дают возможность более интенсивно развивать специальные науки.

Говоря о *предмете и функциях математики*, очевидно, что в современной науке все более ощутимой становится интегрирующая роль математики, поскольку она, как и философия, является всеобщей научной дисциплиной. Сравнивая ее с философией, необходимо четко определить предмет математического знания. Дефиниция той или иной науки, конечно, не содержит исчерпывающей характеристики этой науки. Ф.Энгельс определял математику как науку, занимающуюся изучением пространственных форм и количественных отношений реальной действительности. Однако современные, наиболее развитые математические теории непосредственно имеют дело уже с так называемыми абстрактными структурами, так что современная математика чаще всего определяется как наука о чистых, абстрактных структурах.

Отметим еще одну особенность математики. Обычно предмет науки отличают от ее объекта. В случае математики отличие объекта от предмета выглядит не так, как во всех иных науках, если иметь в виду, что под предметом науки обычно понимают определенную сферу деятельности, совокупность, систему тех закономерностей, которые изучаются ею. Математика, строго говоря, не изучает законов развития природной или социальной среды, их изучают обычные науки. В самом деле, всеобщие законы окружающей нас действительности изучает философия, а частные остальные (частные) науки. Математике же в этом отношении, что называется, не повезло. Она не является частной наукой в обычном понимании этого слова; она есть особый способ теоретического описания действительности. В этом отношении она больше, чем обычная наука, ибо в принципе она может описывать любое явление окружающего нас мира и представляет собой целую совокупность дисциплин. (Философия тоже нечто большее, чем наука, но в ином смысле: она является и наукой, и особой формой общественного сознания, содержащей в себе элементы идеологического характера).

Уяснение предмета математики позволяет понять в общих чертах, как она соотносится не только с философией, о чем говорилось выше, но и с частными науками, изучающими отдельные фрагменты природного и социального окружения, равно как и идеальных по своей природе психических процессов. Поскольку математика представляет по своей природе всеобщее и абстрактное знание, она в принципе может и должна использоваться во всех отраслях науки.

Специфика математического подхода к изучению действительности во многом объясняет и особенность критерия истины в математике. С критерием истины в частных науках дело обстоит более или менее просто, особенно если не забывать об относительности практики как критерия истины. В математике же критерий истины выступает в весьма своеобразной форме; мы не можем доказать истинность математического предложения, основываясь лишь на практике, сколько бы мы не измеряли углы треугольника, нам не удастся доказать, что сумма внутренних углов треугольника равняется в точности 180 градусам. И это объясняется не столько ошибками измерения, которое не может быть идеальным, абсолютно точным, сколько аподиктическим характером математических понятий, формально-дедуктивным выводом предложений, теорем математики.

1.2 Проблема оснований и обоснования математики

В общей системе наук математика стоит на особом месте. Ее методы, принципы и теории в той или иной мере используются во многих областях научного познания и практической деятельности человека. Но и сама математика оказывается под воздействием гуманитарных тенденций в науке и технике.

Современные исследования в области философии математики условно можно разделить на две группы. Первую группу предоставляют работы, в которых обращается внимание на изучение сущности математики, ее природы как таковой независимо от того конкретного состояния, в котором она находилась на каком-либо этапе исторического развития. Иными словами, математика в этом случае изучается в статике. Такой подход называют **фундаменталистским**.

Фундаменталистская философия математики рассматривает следующие проблемы:

1. диалектико-материалистичекое понимание сущности математики и ее взаимоотношения с объективной действительностью;
2. природа математического доказательства и значимость для обоснования математических теорем ученых в области математики и логики;
3. идеализация, формализация (описание основного исследуемого процесса с помощью символов) и аналогия в математике;
4. понятие бесконечности как математического объекта;
5. конструктивизм и интуиционизм в математике, и их взаимоотношение;
6. раздвоенность «чистой» и «прикладной» математики.

Зарубежные исследователи математики разрабатывают в основном такие вопросы как:

1) природа и существование математических объектов, и их обусловленность теориями, в которых эти объекты заданы;
2) истинность математического знания и сущность математического доказательства;
3) поиск общности математических теорий при условии их формализации с использованием средств математической логики.

В рамках *фундаменталистского направления в философии математика* рассматривается как система знаний, развитие которой ставится в зависимость от того или иного понимания ее сущности. При этом переход с одного уровня развития на другой предстает как историческая необходимость, предопределяющая стремление математики к некоторому заранее заданному идеалу.

Несмотря на ограниченную свободу творчества математиков, опирающихся в своей деятельности на методологические установки (трактовка математических объектов, доказательства и т. п.) они внесли значительный вклад в разработку многих важных вопросов, как внутри математики, так и в ее истории.

Ко второй группе относят работы, в которых математика исследуется в рамках той или иной исторической данности. При таком подходе обращается внимание на выявление закономерностей, обусловливающих развитие математического знания. При этом математика взаимодействует с другими науками, техникой и различными видами практики. Это направление в философии называют **нефундаменталистским.**

По сравнению с фундаменталистским направлением ***нефундаментласитское имеет следующие особенности:***

1. в центре внимания находятся проблемы функционирования математики, а проблема обнаружения независимой от развития ее неизменной сущности отодвигается на задний план;
2. в исследованиях истории математики отдается предпочтение методу индивидуализации, а не обобщению;
3. исследования, ведущиеся в рамках этого направления, ближе к современному уровню разработок, как в самой математике, так и в ее истории.
4. математика рассматривается в ее многообразных взаимосвязях с другими науками, с культурой в целом.

Наряду с поиском закономерностей в развитии математического знания для этого направления философии математики характерна также постановка и разработка вопросов, связанных с выяснением границ интерпретаций исторических источников, изучением роли культурно-исторической среды в развитии математики, пониманием революции и кризиса в математике и т. д.

Несмотря на существенные отличия ***фундаменталистского*** и ***нефундаменталистского*** подходов, в рамках философии математики они являются вполне равноправными и скорее дополняют, чем отрицают друг друга. Каждый из них в меру своих возможностей вносит свой вклад в решение проблем математического познания, волнующих ученых и философов. Каждый из них в результате предлагает нам свой образ математики. Синтез полученных с помощью этих разных подходов образов дает возможность сформировать целостное представление о математике как развивающейся системе научного знания, ее месте в культуре и ее предназначении.

В ходе развития математического знания выделяют *три кризиса оснований математики.* Каждый этап не только имел задачей подвести итог достигнутого и успешно завершить строение комплекса математического знания, но и затрагивал философско-эстетические положения на которые оно опиралось.

Первый кризис оснований математики датируется примерно V век до н.э. Он был вызван открытием несоизмеримых отрезком, т.е. существованием иррациональных чисел. Повышение требования к строгости теории привело к ряду трудностей для ученых. Это, прежде всего, нерешенность основных «античных» математических проблем – задач квадратуры круга, трисекции угла и удвоения куба. Проблемы и ограничения обозначали внутренние границы античной науки, за которые она не могла выходить, не потеряв свою целостность.

Второй причиной, вызвавшей данный кризис стало обнаружение парадоксов бесконечно малых, открытых Зеноном в школе элеатов. Именно из-за тесной взаимосвязи общих философских представлений с фундаментальными математическими положения открытие Зенона существенно затронуло систему математических знаний.

Преодоление данного кризиса стало возможным в результате создания теории пропорций, описанной в «Началах» Евклида, и создание Архимедом особого метода исчерпывания – прообраз современных теорий интегрирования. Метод исчерпывания, изучение конических сечений, измерение объемов, площадей, кривых подводили вплотную к исчислению бесконечно малых, но грозили разрушению целостности строения античной математики. Поэтому дальнейшего развития новых идей не последовало, а вместо этого был утрачен интерес к решению данных проблем.

Эпоха Возрождения демонстрирует яркий пример влияния на математику искусства. Изучение творчества Альберти и А. Дюрера открывает возникновение перспективы, которая затем нашла свое теоретическое выражение, создало важные предпосылки для развития оптики и проективной геометрии. Архитектурное строительство и его теоретическое обоснование возрождает интерес к математике. Ключевым моментом для открытия новых подходов стала идея бесконечности. Новая математика данного времени представляла собой не только новые методы решения задач, но и новые аксиомы, которые обосновывали эти методы. Изучение зависимостей между величинами выдвигает на первый план понятие функции, играющую в дальнейшем в математике не меньшую роль, чем понятие числа. Дальнейшее изучение функциональных зависимостей приводит к основным понятиям математического анализа, вводящим в математику в явном виде идею бесконечно, а, следовательно, понятия предела, производной, дифференциала и интеграла.

Второй кризис оснований математики был обусловлен противоречивым результатами исчислений бесконечно малых, что подтверждает идею связанности и перекрытия одного кризиса другим. Выход из данного кризиса был связан с отказом от представления об актуально бесконечно малой величине и возвратом к идее потенциальной бесконечности – хорошо известная нам сейчас теория пределов О. Коши.

Чрезмерно свободное оперирование понятием актуальной бесконечности спровоцировало **третий кризис математики**. Это было связано с возникновение теории множеств Г. Кантора, отталкивающейся от идеи универсализовать все числовые и пространственные многообразия к единой теоретической модели. Проявление данного кризиса привело к обнаружению парадоксов (или антиномий) в теории множеств, что вынудило исследователей обращаться к логическим и семантическим сторонам языка и активизировать внимание на различении понятий «смысл», «значение», «понимание» и т.п.

«Кризисы оснований» дали толчок пересмотру не только философских оснований математики, но и стимулировали поиски новых путей развития самой философской мысли, что в свою очередь оказывало значительное влияние на развитие математической науки. Таким образом, эпохи «кризисов оснований математики» сыграли существенную роль в становлении комплекса современного математического знания.

В XIX веке с возникновением в математике всё ярко абстрактных понятий и теорий, остро встал вопрос об их обосновании. Обоснование математики приняло форму непротиворечивости математических теорий. Начался критический пересмотр теорий: от системы аксиом, лежащих в их основе, до правил доказательств и конечных выводов. Первым шагом стала попытка осмысления математики с помощью теории множеств. Георг Кантор попытался перевести все математические теории на язык теории множеств (все термины и предложения). Для большинства теорий это удалось. Но в самой теории множеств обнаружились логические противоречия, поставившие под сомнение её как основание математики.

Основной принцип научного исследования состоит в том, что ни одно высказывание, ни одна теория не принимаются научным сообществом без достаточных снований. Однако в ряду всех наук математика занимает особое место. Её утверждения не просто истинны, а необходимо истинны. В чём источник необходимости математических утверждений? Что может служить достаточным основанием их принятия? – Ответы на эти принципиальные вопросы образуют содержание проблемы обоснования математики.

Процедура обоснования математики формально имеет характер следующей неразрешимой дилеммы. Математическое знание, как и всякое другое знание, требует внешнего обоснования. Ибо ясно, что математика не является самодостаточной, самой себя обосновывающей наукой. Но, будучи необходимой, математика не может быть обоснована ничем внешним, эмпирическим, потому что последнее принципиально не является необходимым. Решить эту дилемму неформально означает доказать, как математическое знание достигает необходимости (*аподиктичности*), хотя его предпосылки сами не являются необходимо истинными.

Событием, которое, по общему признанию, потрясло весь математический мир и стало причиной появления альтернативных программ обоснования математики, стал *кризис математики, разразившийся в начале XX века.*

К концу XIX века трудами К. Вейерштрасса, Р. Дедекинда, Д. Пеано, Г. Кантора и ряда других выдающихся математиков основы классического математического анализа были определённым образом уточнены. Особенно большое значение для этого уточнения имели работы Г. Кантора, посвящённые теории множеств, которая представлялась естественным фундаментом всего грандиозного здания математики. Но в высших разделах теории множеств были обнаружены логические противоречия. Чаще всего в качестве примера парадоксов теории Кантора приводится антиномия, открытая Б. Расселом.

Парадокс Рассела — открытая в 1903 г. и позднее переоткрытая Э. Цермело теоретико-множественная антиномия, демонстрирующая противоречивость логической системы Г. Фреге, являвшейся ранней попыткой формализации наивной теории множеств Г. Кантора.

Антиномия Рассела формулируется следующим образом:

Пусть ***К*** – множество всех множеств, которые не содержат в себе в качестве своего элемента. Содержит ли ***К*** само себя в качестве элемента? Если да, то, по определению ***К***, оно не должно быть элементом ***К*** – противоречие. Если нет – то, по определению ***К***, оно должно быть элементом ***К*** – вновь противоречие.

Существует много популярных формулировок этого парадокса. Одна из них традиционно называется парадоксом брадобрея и звучит так:

Одному деревенскому брадобрею приказали *«брить всякого, кто сам не бреется, и не брить того, кто сам бреется»*, как он должен поступить с собой?

Еще один вариант:

В одной стране вышел указ: *«Мэры всех городов должны жить не в своем городе, а в специальном Городе мэров»*, где должен жить мэр Города мэров?

И ещё один:

Некая библиотека решила составить библиографический каталог, в который входили бы все те и только те библиографические каталоги, которые не содержат ссылок на самих себя. Должен ли такой каталог включать ссылку на себя?

Обнаруженное противоречие побудило Рассела к пересмотру взглядов на логику, которую он сформулировал в виде теории разветвленных типов. Однако построение математики на основе теории типов потребовало понятия аксиом, которые неестественно считать чисто логическими. К ним относятся, например, аксиома бесконечности, которая утверждает, что существует бесконечно много индивидов, то есть объектов наинизшего типа. В целом попытка сведения математики и логики не удалась. Как показал Гегель, никакая формализованная система логики не может быт адекватной базой математики.

Парадокс Рассела – самый известный из относящихся к основаниям математики, но не единственный. Все они обладают одной и той же логической структурой, а именно структурой парадокса «Лжец». Этот парадокс возникает как следствие незаконной, имеющей характер порочного круга, по мнению Рассела, *самореференции* определённых понятий. А. Пуанкаре назвал понятия, не способные к непротиворечивой самореференции, непредикативными. Обнародование парадокса Рассела и ему подобных противоречий побудили математиков к поиску непредикативных понятий не только в теории множеств, но и в других разделах математики.

В целом в начале XX века сложилась следующая ситуация. Теория множеств Кантора, хотя и не без споров и возражений, была признана основанием всей математики. Каждый математический объект мог быть сформулирован в терминах теории множеств, т.е. представлен как теоретико-множественный объект. Вместе с тем возникшие парадоксы вкупе с отсутствием достаточных логических средств для точного выражения и анализа математических рассуждений создали впечатление если не фундаментальной ошибочности, то, по крайней мере, ненадёжности теоретико-множественного обоснования математики. Стали говорить о кризисе математики.

Было предложено множество путей разрешения данного кризиса, большинство которых источник необходимости математических истин видит в особенностях математического знания и соответственно этому развивает особую программу обоснования математики. Это, прежде всего, <u>программы:</u>

1. **логицизма** (основание математики – в логике),
2. **интуиционизма** (основание математики – в априорной интуиции времени),
3. **конструктивизма** (основание математики – в точном предписании, называемом алгорифмов) и
4. **формализма** (основание математики – в представлении её в виде исчисления.

Для полноты картины к ним следует добавить так называемый:

- ***платонистский*** взгляд на природу и особенности математических объектов,
- ***концепцию самоочевидности*** математических теорий и
- ***эмпиристскую доктрину*** необходимости математического знания.

1. Платонизм.

Согласно платонистам, которые не образуют самостоятельного направления и могут принадлежать к разным школам обоснования математики, математика имеет дело с объектами особого рода, реальность существования которых совершенно не зависит от природной действительности или, по крайней мере, не ниже уровня реальности природных объектов. В новейшее время платонистскую концепцию в математике защищал Гёдель, называя её математическим реализмом.

Неудовлетворительность платонистской точки зрения на обоснование математики состоит в том, что она не объясняет, а постулирует необходимость существования определённых объектов. На самом деле любая математическая теория зависит от множества допущений, что делает объекты, существование которых она утверждает, не абсолютно, а только условно необходимыми. Кроме того, она вступает в противоречие с тем способом, каким в действительности интеллект овладевает в процессе своего развития математическими операциями. Развитие математического мышления ни в коем случае не является мгновенным единовременным актом, как должно было быть, если бы платонисты были правы, а представляет последовательно прогрессивный, продолжающийся в течение многих лет процесс. Интеллект способен выполнить математическую операцию, абстрагировать какое-либо свойство только тогда, когда он имеет в своём распоряжении готовую операциональную структуру. И пока такие структуры не созданы, математика с её утверждениями не более необходима, чем сновидение. Математические объекты – конструируемые в самом прямом смысле, а не открываемые нашим интеллектом объекты

2. Концепция самоочевидности.

Аксиоматический характер многих математических теорий, а так же особый статус аксиом в дедуктивной системе, их независимость от опыта наталкивают некоторых математиков на предположение, что необходимость математических суждений является следствием их самоочевидности. Данный критерий восходит, по крайней мере, к Декарту, который утверждал, отвечая своим оппонентам: «Всё, что я воспринимаю ясно и отчётливо, по необходимости истинно». Развёрнутую защиту концепции самоочевидности математических истин дал Лейбниц. По его мнению, в основе самоочевидности лежит то обстоятельство, что все математические истины суть тождественные, т.е. необходимо истинные, истинные сами по себе, утверждения. Их отрицание, следовательно, всегда ложно.

К сожалению, несмотря на все усилия рационалистов, критерий самоочевидности сам не является самоочевидным. Кроме того, не все математические истины самоочевидны.

3. Эмпиризм.

Всем указанным взглядам на причину математической необходимости противостоит точка зрения, согласно которой математика, если не по происхождению своих абстракций, то по своему методу, - эмпирическая наука. Д.С. Милль в XIX в., Л. Кальмар и И. Лакатос в XX в. наиболее последовательно, хотя и с некоторыми отличиями друг от друга, отстаивали эту точку зрения. Основные аргументы её защитников таковы. Если математика – наука, то она, как и все остальные науки, должна быть опытной по происхождению, её метод должен быть подобен общенаучному и степень необходимости её положений не может превосходить степень необходимости естественнонаучных теорий. Математическая необходимость есть не более чем необходимость следования теорем из посылок, называемых аксиомами. Но это уже не онтологическая, а логическая необходимость. К математике в собственном смысле она не имеет прямого отношения.

Неудовлетворительность эмпирического обоснования математики следует из того, что математические суждения не просто истинны, а истинны с необходимостью. Необходимость же может быть следствием только необходимости. Но опытные суждения не являются необходимо истинными и не могут служить формальным основанием истинности математического знания.

Парадоксальность математической необходимости состоит в том, что её доказательство вообще не требует обращения к внешнему опыту.

Можно поэтому согласиться со следующей оценкой перспективности эмпирического обоснования математики. «Верно, что математика в конечном счёте отражает объективный мир, но она (как наука) имеет свою специфику по сравнению с эмпирическими науками, и поэтому нельзя отождествлять методы развития и обоснования математики с методами развития и обоснования эмпирических наук. Методы математики и естествознания в определённой степени сходны, но не идентичны, что связано прежде всего с тем обстоятельством, что идеальные модели пространственных форм и количественных отношений действительности, являющиеся в конечном счёте предметом математики, не даны нам непосредственно эмпирически».

4. Логицизм.

Предположение о сугубо внутреннем, т.е. чисто логическом, основании необходимости математики составляет идейную основу логицизма как особой программы обоснования математики.

Основные тезисы программы логицистов:

1) Все понятия математики определяются в терминах понятий логики.
2) Все теоремы математики выводятся из логических аксиом.

Для осуществления программы логицизма необходимо было предварительно свести саму математику к минимальному числу исходных понятий и утверждений. Такая работа была осуществлена к концу XIX века в исследованиях Дедекинда, Вейерштрасса, Фреге, Пеано, Кантора и др. Ими была осуществлена так называемая арифметизация математического анализа, состоящая в следующем: основные понятия математического анализа были выражены в терминах теории натуральных чисел (арифметики), которые, в свою очередь, были определены в терминах теории множеств. Логицисты задались целью свести исходные понятия теории множеств к понятиям логики.

Впервые конкретно реализовать программу логицизма попытался Г. Фреге, который считал возможным выведение арифметики из логики.

Наиболее разработанную попытку свести математику к логике осуществил Бертран Рассел (1872 – 1970) в сотрудничестве с Альфредом Уайтхедом (1861 – 1947). Они создали грандиозный проект под названием “Principia Mathematica”. Согласно этому проекту предполагалось сведение к логике не только арифметики, но и других разделов математики – прежде всего анализа. Кроме того, он планировался как обобщение наиболее важных результатов, полученных к тому времени в области обоснования математики, включая, прежде всего, работы Пеано и Фреге.

Фреге и Рассел утверждали, что высказывания о натуральных числах суть логически истинные высказывания. И поскольку все остальное математическое здание было основано на элементарной арифметике, логическая истинность её суждений переносилась и на все остальные этажи. Если логическую истину определить, как это обычно делается, как истину во всех возможных мирах, то становится понятным главный мотив основателей логицизма. В этом и только в этом случае необходимый характер математических истин получает объяснение. Ведь со времён Аристотеля необходимым считается то, что не может быть иначе.

Если исходить из духа и буквы логицистской концепции, предлагаемое обоснование должно исключить всё, что является в математике, и, прежде всего, в её предпосылках, ненеобходимым – эмпирическим, интуитивным, психологическим. В итоге математика, которую построили логицисты, оказалась не только независимой от своих логически безупречных оснований, но, будучи избавленной от всех ненеобходимых предпосылок, превратилась в замкнутую относительно дедуктивного следования систему утверждений, лишённую спонтанных и творческих импульсов к развитию и совершенствованию.

Кроме того, поскольку для построения математики необходимы аксиомы, устанавливающие определённые факты в области объектов, обладающих внелогической природой, постольку нельзя считать, что математика выводима из логики. Но кроме недостатков нужно отметить и заслугу логицизма, состоящую в том, что его представители осуществили строгий логический анализ основных понятий математики и содействовали дальнейшим исследованиям в области оснований математики и математической (символической) логики.

5. Конструктивизм (интуиционизм).

Начиная с 1907 года конструктивизм в форме интуиционистской программы обоснования математики систематически развивался голландским математиком Л.Э.Я. Брауэром (1881 – 1966) и продолжает модернизироваться его последователями и в настоящее время. Основные тезисы интуиционизма:

1. Математика – наука об интуитивно очевидных конструкциях и в своём развитии полностью освобождается от диктата логики и языка. Математика представляет полностью автономную и самодостаточную деятельность. Она не нуждается ни в каких внешних гарантиях; всё, что ей необходимо, содержится в ней самой.
2. Утверждения классической математики «существует объект x со свойством P» не конструктивны и должны быть заменены утверждениями типа «я выполнил построение K, доказывающее наличие объекта x со свойством P».
3. Любое математическое суждение утверждается только тогда, когда имеется его доказательство.
4. Утверждения согласно закону исключённого третьего незаконны, пока не будут построены доказательства обеих альтернатив.
5. Логика никак не связана с математикой и поэтому ничего не говорит и не может сказать о ней. Логика – механическая по своей сути имитация реального математического языка, её стенографический отчёт. Сам язык не принадлежит математике, он всего лишь несовершенное средство общения между математиками, сохранения полученных результатов. Использование математиками языка и логики может быть оправдано только практическими, но не теоретическими соображениями.
6. Противоречие, присущее понятию актуальной бесконечности, можно разрешить, только отказавшись от этого понятия.

Центральное место в интуиционистской математике занимает идея бесконечной последовательности свободных выборов и основанная на ней теория континуума.

В 40х годах XX века работы А.А. Маркова и его учеников положили начало отечественной версии конструктивизма. Марков отверг идею Брауэра о математике как свободном творении человеческого ума, но сохранил допущение о потенциальной бесконечности её объектов, необходимости конечных и эффективных доказательств согласно особой конструктивной (фактически интуиционистской) логике.

Конструктивная математика Маркова представляет ветвь интуиционистской математики, для которой характерно исследование конструктивных объектов алгорифмическими методами.

Кроме того, в 40х – 50х годах XX века сформировалось ещё одно направление конструктивизма, альтернативное интуиционистскому, которое связано с именем американского математика Э. Бишопа. Вместо бесконечной последовательности свободных выборов Бишоп предпочитает говорить о последовательностях, генерируемых каким-нибудь объективным случайным процессом, например, бросанием монеты или игральной кости. Другое отличие связано с возрастающим интересом к вычислительным процедурам математики, компьютерному решению математических проблем, к созданию программ, позволяющих получать новое математическое знание.

Существует гносеологическая проблема интуиционистского обоснования математики. Истинность математических суждений гарантируется интуитивной самоочевидностью математического построения, оформленного в виде определённого логико-лингвистического отчёта. Однако не все интуиционистские конструкции, особенно связанные с операцией логического отрицания, являются интуитивно самоочевидными.

Критерий интуитивной самоочевидности не является очевидным и при применении к другим логическим операциям. Все они по определению связаны с умственными построениями выполняющих их субъектов. Достаточно допустить существование двух интуиционистов с несовместимыми, но самоочевидными для каждого из них интуициями, как этот критерий теряет свою однозначность и интерсубъективность.

Апелляция к интуиции и исключительно к ней лишает математика возможности эксплицитно сравнивать между собой математические конструкции, устанавливать между ними логические связи и доказывать истинные и опровергать ложные из них

6. Формализм.

В начале 20-х годов XX века немецкий математик Давид Гильберт (1862 – 1943), подталкиваемый собственными исследованиями, а также спорами с логицистами и интуиционистами, предложил новую программу обоснования классической математики, получившую название программа Гильберта. Другие названия этой программы, принятые в литературе, – теория доказательства, метаматематика. Её целью были формализация всей математики в аксиоматической форме и доказательство определёнными «финитными» методами, что полученная аксиоматизация непротиворечива. Кроме Гильберта, в разработке программы в разное время принимали активное участие такие логики и математики, как В. Аккерман, П. Бернайс, Г. Генцен, Дж. фон Нейман и Ж. Эрбран.

Д. Гильберт считал, что обоснование математики по Расселу, не является строгим, поскольку оно опирается на утверждения типа аксиомы сводимости и аксиомы бесконечности, которые могут быть поняты только как некоторого рода гипотезы. Однако он был согласен, что строгость математики может быть достигнута только через уточнение ее языка и через пояснение логической структуры теории. Гильберт взял у логицистов понятие строгой аксиоматизации и формализации математической теории. А с Брауэром соглашался в том, что закон исключенного третьего неприменим к математическим утверждения, связанным с бесконечностью. В итоге Гильберт сформулировал принцип финитизма, согласно которому оперирование с бесконечным может быть сделано надежным только через конечное.

Формализованная теория предполагает содержательную метатеорию, которая включает в себя описание структуры формализма, общие принципы логики и специальные правила преобразования, допустимые для действий в рамках формализованной теории. Метатеория, таким образом, должна быть безусловной истинной и достаточной для строгого обоснования непротиворечивости формализма, которое должно состоять в доказательстве того факта, что в его рамка в соответствии с правилами логики и введения производных объектов не может быть получено выражение, имеющее вид «0=1».

Гильберт формулирует ряд требований к метатеории, которые известны как *принципы гильбертовского финитизма*, согласно которым метатеория является:

1) Синтаксической, т.е. она имеет дело только со знаковой структурой теории и с преобразованиями, допустимыми в этой структуре;
2) Содержательной, т.к. она относится к конкретному формализму как к своему единственному предмету и в своих внелогических предпосылках не выходит за пределы описания его очевидных свойств;
3) Финитной, она не имеет дела с операциями с бесконечными множествами и с математическими принципами, связанными с допущением актуальной бесконечности;
4) Конструктивной, всякое утверждение о существовании объекта в ее рамках должно быть подтверждено процедурой его построения;

Методологический замысел данной теории состоит в том, чтобы ограничить метатеоретическое рассуждение таким образом, чтобы оно гарантировало его абсолютную достоверность. Метатеория должна быть способной доказывать непротиворечивость формализованных теорий и непротиворечивость соответствующих им содержательных теорий, независимо от их содержания. Под сомнение данную программу поставила теорема о непротиворечивости Геделя. Провал обоснования математики привел к устойчивому скептицизму относительно возможностей разрешения этой проблемы вообще.

Отличительной чертой гильбертовского подхода можно считать примирение конечной и трансфинитной математик, доказательство непротиворечивости всей системы в целом.

Некоторое время казалось, что программа финитного обоснования математики Гильберта должна вот-вот получить триумфальное завершение. Однако в начале 30-х годов XX века были открыты такие ограничения, которые поставили под сомнение её осуществление в полном объёме.

В 1931 году была опубликована статья 25-летнего австрийского математика Курта Гёделя (1906 – 1978) «О неразрешимых высказываниях Principia Mathematica и родственных систем», которая до сих пор считается одной из самых выдающихся работ в области обоснования математики.

Статья Гёделя содержит два результата. Сначала Гёдель доказывает, что любая формальная система типа Principia Mathematica, включающая арифметику, принципиально неполна. Это означает, что существуют истинные арифметические высказывания, которые тем не менее не выводимы из аксиом подобных систем. Предположение об увеличении числа аксиом или об их модификации никак не может изменить этого отрицательного заключения. Даже если бы формализованная арифметика содержала бесконечное число аксиом, всё равно существовали бы истинные арифметические утверждения, которые не были бы её теоремами.

Затем Гёдель обосновывает, что невозможно дать доказательство непротиворечивости системы, формализующей всю арифметику, если правила этого доказательства удовлетворяют требованию финитности. Сразу же напрашивается предложение использовать более сильные, чем финитные, методы доказательства. Однако применение более сильных методов доказательства, во-первых, несовместимо с одним из основных принципов программы Гильберта и, во-вторых, оно только переводит решение проблемы на более высокий уровень. В любом случае программа финитного доказательства непротиворечивости не только всей математики, но даже арифметики оказывается принципиально невыполнимой.

Подводя итог всему сказанному, можно сделать вывод о том, что ни одна из ведущих программ обоснования математики XX века не смогла завоевать абсолютного признания и решить проблему обоснования в полном объёме.

Одной из причин такой неудачи можно считать разделяемое всеми специалистами, работающими в области обоснования математики, общее заблуждение, что математика должна иметь единое и достоверное основание – источник, из которого она могла бы гарантированно извлекать свои истины. Математика не только не имеет такого основания, но она также не имеет раз и навсегда заданного универсума своих объектов и операций над ними. Создание неевклидовых геометрий ясно показало, что математика имеет дело с множеством возможных моделей, ни одна из которых не является для неё более фундаментальной, чем другая. Математика, как никакая другая наука, - в очень высокой степени замкнутая и независимая от непосредственного влияния практических потребностей, саморазвивающаяся и самодетерминирующаяся область знания, внешние (психологические, культурные, социальные) причины для которой являются важными, но не определяющими.

1.3 Проблема математического объекта

Непосредственный ***предмет математики*** - это изучение систем математических объектов. Сами эти объекты, их свойства и отношения определяются математикой. Но проблема происхождения математических объектов и их соотношения с объективной реальностью выходит за пределы математики, разрешаясь, в том числе, средствами философии. В данном вопросе следует раскрыть основные философские подходы к определению природы математических объектов, а, значит, и предмета математики.

Проблема вызвана тем, что математические объекты не существуют объективной реальности. Они являются результатом работы человеческого мышления и в чистом виде существуют только в сознании человека. Такая специфичность объектов математики дала повод для идеалистического истолкования этой науки. В ответе на этот вопрос следует охарактеризовать различные подходы к определению природы математики: *эмпиризм, априоризм, формализм.*

Сама постановка проблемы существования абстрактных объектов связана с возникновением математики как теоретической науки и была вызвана расхождением между точно определёнными идеальными объектами и относящимися к ним математическими истинами, с одной стороны, и весьма сложными и неоднозначно описываемыми эмпирическими предметами – с другой.

Если на первоначальных этапах истории математики связь её понятий с действительностью установить сравнительно легко, то на «верхних этажах» познания в результате многократного абстрагирования и идеализации исчезает почти всякое представление о породившей их реальной основе. Вследствие этого легко может возникнуть иллюзия появления самостоятельного мира «математических сущностей», о которых говорят платонисты.

Тем не менее, в математических понятиях и теориях отображаются, хотя и довольно сложным и опосредованным путём, определённые свойства и отношения реального мира. Процесс абстрагирования и образования понятий в математике в принципе в своих главных чертах не отличается от абстрагирования в других науках. Специфика математического познания выражается в широком использовании абстракций от абстракций и далеко идущего процесса идеализации.

Как показывает история математики, многие её понятия возникают не в результате абстрагирования от эмпирически воспринимаемых свойств предметов, а в процессе последовательного обобщения некоторых признаков уже известных математических понятий или объектов. Такой процесс обобщения, связанный с абстрагированием, может повторяться несколько раз, образуя своеобразную лесенку абстракций от абстракций, в которой нижние ступени будут представлены понятиями, ближе всего связанными с эмпирической действительностью. Верхние же ступени абстракций часто бывают настолько удалены от нижних, что нередко кажутся совершенно произвольными творениями мысли. Дело осложняется тем, что многие из абстракций более высокого уровня исторически формируются значительно позднее, и поэтому установить их связь с абстракциями более низкого уровня оказывается весьма трудным. Здесь-то и возникает специфическая философская проблема о существовании математических объектов, вокруг которой идут дискуссии ещё начиная с античности.

В математике в силу самого характера её предмета отвлекаются от всех конкретных, качественных свойств и отношений вещей и принимают в расчёт только чисто количественные и пространственные свойства и отношения. Эти последние можно рассматривать как разновидности более общих свойств и отношений, которыми обладают математические структуры. Вполне понятно поэтому, что связь идеальных объектов математики с действительностью оказывается более сложной и опосредованной, чем в физике и других отраслях естествознания. К тому же многие из идеальных объектов математики, такие, как точка, прямая и плоскость, сформировались так давно, что проследить процесс их возникновения оказывается совершенно невозможным. Наконец, в математическом познании акты «чистого» отвлечения комбинируются с идеализацией и многократным абстрагированием. Всё это крайне затрудняет сопоставление математических объектов с действительностью

В возможности образования многоступенчатых абстракций и широком использовании в процессе образования понятий таких средств исследования, как идеализация, мысленное экспериментирование с математическими объектами, аналогия, обобщение и специализация, наиболее ярко выступает относительная самостоятельность развития математического знания. В силу самого характера предмета математики этот фактор проявляется в ней значительно сильнее, чем в экспериментальных и фактуальных науках, которые обязаны систематически сопоставлять свои абстракции с результатами опытов и наблюдений, т.е. с определёнными эмпирическими фактами.

Иначе обстоит дело в математике. Хотя исходные математические понятия и теории возникают под влиянием практических потребностей общества, но, раз возникнув, они обретают известную самостоятельность. На основе имеющегося запаса абстракций становится теперь возможным строить новые абстракции чисто логическим путём, а последние, в свою очередь, служат базой для создания новых математических теорий, которые только впоследствии получают реальную интерпретацию в естествознании и других науках. Иногда такие интерпретации обнаруживаются только спустя длительное время после создания новых теорий.

Объекты, которые возникают в процессе абстрагирования и идеализации в математике, весьма сильно отличаются от их прообразов. Точно так же утверждения, которые относятся к абстрактным объектам, нельзя непосредственно проверить на опыте. Часто говорят, что математические истины точны и достоверны, в то время как эмпирические истины приблизительны и проблематичны. Такое резкое расхождение между абстрактными и эмпирическими объектами и соответствующими истинами заставило уже античных учёных задуматься над проблемой существования математических объектов.

Пифагорейцы пытались решить эту проблему, утвердив, что вещи существуют через подражание числам. Рассматривая число и количественную определённость в целом как сущность вещей, пифагорейцы превращали математические абстракции в начала всего сущего. Эта объективно-идеалистическая точка зрения нашла дальнейшее развитие в учении Платона, которое во многом примыкает к философии пифагорейцев.

Платон и его сторонники рассматривали эти объекты как особые сущности, принадлежащие к сверхчувственному миру, а математическое познание – как воспоминание тех идей, которые душа некогда созерцала в трансцендентном мире.

Попытка Платона представить математические объекты существующими в особом трансцендентном мире, который в последствии стали называть миром универсалий, была первой попыткой объяснить, почему абстрактные объекты так сильно отличаются от эмпирических. Как и для всякого объективного идеалиста, для Платона мир идей предшествует миру вещей. Вещи могут изменяться и уничтожаться, идеи остаются неизменными, определёнными и совершенными. Чувственно воспринимаемые предметы представляют лишь отблеск, тень, несовершенное воплощение вечных идей. Отсутствие математических объектов в эмпирическом мире объясняет, по мнению Платона, их отличие от чувственно воспринимаемых вещей.

Такой подход может объяснить расхождение между математическими и эмпирическими истинами, но он не показывает, почему математика с её абстрактными объектами оказывается всё же применимой для изучения реального мира, в том числе и мира эмпирического опыта.

В отличие от платонистов Аристотель считал, что математические объекты возникают в результате абстрагирования от всех чувственно воспринимаемых свойств вещей и сохранения только их «количественной определённости и непрерывности».

Субъективно-идеалистическая доктрина, основателями которой считают Плотина и Н. Кузанского, рассматривает математическое познание как самопознание человеческой мысли. При таком подходе математические понятия и теории объявляются чистым порождением деятельности субъекта. Человеческий разум может, конечно, создавать самые отвлечённые понятия и конструкции, но они будут оставаться совершенно бесполезными для науки, если не будет установлена объективность их содержания или по крайней мере их интерсубъективность.

И. Кант пытается обосновать всеобщий и необходимый характер математических понятий как результатов конструктивной деятельности познания, особыми априорными формами созерцания, якобы изначально присущими человеку.

Когда говорят о платонизме в современной версии, то имеют в виду тенденцию рассматривать существование абстрактных объектов наравне с существованием конкретных объектов. Спор, таким образом, идёт о том, можно ли приписать самостоятельное бытие таким объектам, как число, функция, множество и т.п., или же они служат лишь в качестве терминов языка, употребляемых в собирательном значении.

Известный специалист по основаниям математики П. Бернайс связывает с платонизмом такой подход к математическим объектам, при котором они рассматриваются независимо от какой-либо связи с размышляющим субъектом. Эта независимость, по его мнению, выражается в том, что числа, фигуры, функции, множества и т.п. математические объекты постулируются существующими до их построения, вычисления и определения. В этом смысле платонистский подход противопоставляется конструктивной точке зрения, согласно которой объекты считаются существующими только после их построения.

Альтернативной платонистской является *номиналистская* точка зрения на проблему математического объекта. Номиналисты подвергли резкой критике не только допущение о возможности самостоятельного существования таких абстрактных объектов, как множества и функции, но и числа, свойства и отношения. По их мнению, все объекты, которые допускаются в теории, должны быть только индивидуальными.

Стремление обойтись в математике без абстрактных объектов представляет другую крайность. Оно приводит не только к значительному усложнению языка, но и к утрате подлинного понимания связи математики с действительностью, поскольку при номиналистическом подходе сама математика превращается в чистую схему, лишённую содержания, формальное исчисление без интерпретации.

Особая точка зрения на проблему существования абстрактных объектов выражена Р. Карнапом. По его мнению, речь может идти о принятии той или иной системы научного языка, его плодотворности, простоты, эффективности, вопрос же о реальности не только научного языка, но и существования мира в целом он считает псевдопроблемой, и все направленные на её решение концепции объявляет несостоятельными.

Поскольку математика как абстрактная наука не может проверять свои выводы непосредственно с помощью опыта, то в ней исключительную роль играют логика и вообще чисто теоретическая деятельность. Но в процессе познания всегда могут возникнуть абстракции, которые будут слишком сильно искажать действительность или иметь с ней так мало точек соприкосновения, что по сути дела будут представлять фантазии.

Где найти гарантии того, что используемые в математике абстракции окажутся плодотворными, что они не будут слишком отрываться от действительности и не превратятся в фантазии?

Эффективность математических абстракций зависит от успешного их использования в других науках и на практике, но эффективность целого ряда математических идей и теорий обнаруживается спустя долгое время после их появления. Соответственно математики вынуждены искать дополнительные критерии, с помощью которых можно было бы контролировать процесс образования абстракций. Одним из таких критериев является требование логической непротиворечивости вводимых понятий и теорий.

Кантор и его последователи утверждают, что критерий непротиворечивости является не только необходимым, но и достаточным условием для существования математического объекта. Этот формальный критерий обычно противопоставляется другим на том основании, что математика имеет дело с абстрактными объектами.

Этот взгляд защищал и крупнейший французский математик А. Пуанкаре: «Математика, - утверждал он, - не зависит от существования материальных вещей; в математике слово существовать может иметь только один смысл, - оно означает устранение от противоречия».

Тем не менее, критерий непротиворечивости, хотя и является необходимым условием для допустимости абстрактных объектов и теорий математики, недостаточен для признания их существования. Как подчёркивает П. Бернайс, в математике утверждения о существовании обыкновенно следуют не за установлением непротиворечивости, а, наоборот, установление непротиворечивости происходит путём представления модели.

Критерий непротиворечивости не даёт возможности установить наличие объекта, т.е. построить и вычислить его.

Интуиционисты сходятся в том, что связывают существование математических объектов с возможностью их построения и тем самым признают только конструктивные доказательства. Суждение о существовании определённого математического объекта, указывает Г. Вейль, «приобретает значение только в том случае, когда построение уже осуществлено на деле, доказательство проведено».

В конструктивной математике иначе истолковываются теоремы существования и выдвигается другой критерий существования математических объектов. В теоретико-множественной математике объект считается существующим, если будет, например, доказано, что отрицание его существования приводит к противоречию. Большей частью такие доказательства, называемые косвенными, опираются на использование логического закона исключённого третьего, который конструктивисты считают недействительным для потенциально бесконечных множеств. Признавая только эффективные доказательства, они считают объект существующим тогда и только тогда, когда он будет либо фактически, либо потенциально построен.

Таким образом, с теоретико-познавательной точки зрения различные критерии существования математических объектов служат для того, чтобы ограничить чрезмерную свободу в оперировании абстракциями, не дать возможности превратиться им в чистые фантазии. А это значит, что сама проблема существования абстрактных объектов в математике с широкой, философской точки зрения сводится к проблеме обоснования объективности математического знания

1.4 Рациональное и иррациональное в математике

В современной философии научного познания особое значение приобретают проблемы соотношения рационального и иррационального.

Интуиция во многом определяет характер мышления человека, его подход к решению тех или иных проблем.

Интуиция (позднелат. Intuitio — «созерцание», от глагола intueor — пристально смотрю) — чутьё, проницательность, непосредственное постижение истины без логического обоснования, обоснованное на воображении, эмпатии и предшествующем опыте.

Математик, обладающий интуитивным мышлением, продолжительное время, работая над решением какой-либо проблемы, способен быстро делать выбор наиболее эффективного подхода к ее решению или неожиданно, внезапно получать само решение прежде, чем оно будет обосновано. Он воспринимает проблему целостным образом и не осознает того, каким образом получено ее решение. Естественно, что решение при этом обязательно нуждается в проверке доказательными рассуждениями. Математик-аналитик вполне осознает ход своих рассуждений и может отчетливо выразить каждый их шаг словесно. Поиск решения проблемы математиков-аналитиков целенаправлен, достаточно строго спланирован и последователен. Конечно, в действительности интуитивное и аналитическое мышление взаимосвязаны и дополняют друг друга. Тот или иной тип мышления является лишь преобладающим.

Роль интуиции очевидна. Она подсказывает математику правильное решение, которое он затем обосновывает на языке математической теории, переводя неявное знание в знание, выраженное с помощью символов и терминов математики. Не менее важной и необходимой в науке является логика. Интуиция может быть источником ошибок и заблуждений, она всегда личностна, субъективна, и, следовательно, ее результаты никогда не могут считаться окончательными и безупречными для всех и каждого. Они всегда нуждаются в критической оценке и строгом обосновании.

Неявное знание отличается тем, что к нему не применимы традиционные характеристики знания – логическая обоснованность, возможность однозначной истинностной оценки. Это знание человек приобретает путем собственного жизненно-практического опыта, оно имеет пристрастия и убеждения субъекта и не допускает полного объяснения.

В математике проблема неявного знания заключается в проблеме обоснования, так как математик нередко неосознанно опирается на положения, явным образом не сформулированные, не выраженные в языке. Иногда в качестве основания для доказательства тех или иных утверждений используется ссылка на внутреннюю убежденность в истинности некоторого положения, которое является результатом неосознанного, мгновенно промелькнувшего в его голове умозаключения.

Неявное знание в математике является содержанием таких неопределенных понятий, как количество, множество, дискретность, непрерывность и т. п. Неявное знание в определенной мере служит средством, которое в дальнейшем используется для математических разработок. Оно во многом обусловливает характер предпосылок, лежащих в основе создаваемого метода, дающего возможность вывести те или иные теоретические утверждения.

При логическом подходе воспроизводится история объекта, но при этом она не подвергается определенным логическим преобразованиям: обрабатывается теоретическим мышлением с выделением общего, существенного и освобождается в то же время от всего случайного, несущественного, мешающего выявлению закономерности развития изучаемого объекта.

2. Специфика математического знания

2.1 Становление и развитие математической науки

В развитии математики проявляются те же закономерности, что и в развитии других наук. Наука как одна из форм общественного сознания является отражением общественного бытия. Это значит, что главной причиной развития науки является развитие материальной жизни общества. В математике выделяются несколько уровней. Особенно тесную связь с материальной жизнью общества всегда имел нижний уровень - практическая математика, которая в XIX веке превратилась в прикладную математику. Ещё одним внешним фактором развития математики, помимо практики, стали потребности других наук.

Наука как форма общественного сознания обладает относительной самостоятельностью в своём развитии. Она имеет собственную логику развития, которая лишь в общих чертах отражает логику развития материальной жизни. Математика по сравнению с другими науками обладает ещё большей самостоятельностью. Это объясняется спецификой предмета математики. Если другие науки непосредственно изучают материальные объекты и процессы, то математика изучает системы математических объектов, ставших результатом абстрагирования и идеализации. Познание таких объектов происходит относительно обособленно от познания материальных объектов и от практики. Поэтому важную роль в развитии математики играют внутренние факторы. Это касается, прежде всего, высшего уровня - теоретической математики. На этом уровне математика решает задачи, напрямую не связанные с практикой и возникшие внутри самой математики. Упорядочиваются накопленные знания, устанавливаются связи между отдельными результатами, обобщаются понятия и теории, совершенствуются методы, преодолеваются возникающие противоречия, парадоксы.

Необходимо отметить и другие закономерности в развитии математики: диалектику количественных и качественных изменений, единство процессов дифференциации и интеграции.

<u>В истории зарождения и развития математики различают четыре периода:</u>

1) **до VI в. до н.э**. – период зарождения математики.
2) **VI до н.э. – XVI вв**. – период элементарной математики, или математики постоянных величин.
3) **XVI – XVIII вв**. – период математики переменных величин.
4) **XIX – XX вв**. – становление современной математики.

1. Период зарождения математики (до VI в. до н. э.).

В этот период математика Древнего Египта, Вавилона, Древнего Китая и Древней Индии представляла собой неупорядоченное множество отдельных эмпирических сведений и результатов. Она не была еще в достаточной мере систематизированным и рациональным знанием, для которого характерны, прежде всего, логический вывод и использование не материальных математических объектов. Это была пока еще *предматематика*, *преднаука*. Свое становление и развитие как систематизированное знание, как особая, самостоятельная наука со своим предметом и методом математика начинает в древней Греции. Такое понимание математики было связано, прежде всего, с идеей доказательства или дедуктивного вывода. Название знаменитого труда Ньютона «Математические начала натуральной философии» свидетельствуют о стремлении постичь движущие силы природы, исходя из математических законов.

2. Период элементарной математики (VI в. до н. э. – XVII в. н. э.) или период постоянных величин.

Характеризуется простыми методами решения задач, сосредоточением вниманием на постоянных величинах. Математика при этом являет собой определенную целостность, внутри которой нет деления на теоретическую и практическую математику, она вся в определенной мере считается теоретической. Вместе с тем, здесь же обращается внимание на процесс отделения арифметики-алгебры от геометрии, на начинающуюся дифференциацию внутри математической науки.

3. Период математики переменных величин (XVII в. – начало XIX в.).

В этот период в силу стремительно развивающейся астрономии, естествознания, техники математики обращаются к исследованиям движения, процессов, преобразований геометрических форм. В центре внимания оказывается изучение переменных величин.

Значительные результаты в математизации научного знания были достигнуты в астрономии и механике, гидромеханике и гидравлике, физике, геодезии и других отраслях точного естествознания и техники.

4. Период современной математики (с XIX в. до наших дней).

На этом этапе своего развития математика, с одной стороны, все больше абстрагируется от реальной действительности, исследуя максимально общие для этой действительности отношения между объектами теоретико-математических структур. С другой стороны, математика все активнее взаимодействует с техникой, естественными и гуманитарными науками, находя свои приложения в той или иной степени во всех областях и на всех уровнях познания и практической деятельности человека (прикладная математика).

В XX в. математика сыграла важную роль в становлении неклассического естествознания, в формировании релятивистской и квантовой механики. Велика её роль в современных исследованиях по проблеме единой теории поля и теории струн.

Математическая «красота» создаваемых теорий является одним из критериев их истинности. Не все математические конструкции получают эмпирическую интерпретацию. Во многих случаях математика предлагает несколько одинаково допустимых моделей, из которых естествознание должно выбрать единственную модель, соответствующую объективной реальности.

2.2 Структура математического знания

В математике изучаются математические модели объектов. Одна и та же математическая модель может описывать свойства далеких друг от друга реальных явлений. Для математика важна не природа рассматриваемых объектов, а существующие между ними отношения.

Структура математики была сформирована под влиянием различных факторов, как внутренних, так и внешних. Взаимосвязь других наук, а также большой объём данных, приводит к разделению теоретической и прикладной математики. Одним из внутренних факторов дифференциации теоретической математики стало применение аксиоматического метода, что привело к возникновению четырех математических теорий:

1) неасксиоматизированные содержательные теории.
2) содержательные аксиоматические теории.
3) полу формальные аксиоматические теории
4) формальные аксиоматические теории.

Важную роль в построении математических теорий играет аксиоматический метод.

Аксиоматический метод – это способ построения научной теории, при котором в основу теории кладутся некоторые исходные положения, называемые аксиомами теории, а все остальные предложения теории получаются дедуктивно как логические следствия аксиом. Теория, созданная на основе этого метода, называется аксиоматической. В аксиоматической теории все термины разделяются на исходные и производные, а все предложения – на недоказуемые (аксиомы)и доказуемые (теоремы). Считается, что система аксиом, положенная в основу аксиоматической теории должна характеризоваться полнотой и независимостью, а сама аксиоматическая теория – непротиворечивостью. Однако эти три принципа выполняются далеко не всегда. Разнообразие форм и количественных отношений, изучаемых математикой, приводит к дифференциации единого математического знания, к выделению относительно самостоятельных разделов и дисциплин, решающих собственные задачи. В тоже время за этим разнообразием сохраняется единство математики. Основанием этого единства является, во-первых, единство материального мира, его количественных и качественных закономерностей, а во-вторых, единство предмета математики, её средств и методов. Таким образом, в математике, как и в других науках, наблюдается единство процессов дифференциации и интеграции.

Главными методами развития математических теорий являются ***абстрагировани***е и ***конкретизация.*** В теоретической математике общей характеристикой является направление от конкретного к абстрактному. В прикладной математике, наоборот, познание идёт от абстрактного к конкретному, к поиску более новых приложений и интерпретаций формальных теорий, применительно к возникающим потребностям других наук и практики.

Несмотря на стремление к точности доказательств, в математике есть место и интуиции. Особенно важную роль интуиция играет в решении нестандартных задач. Условиями интуиции являются профессионализм, глубокие знания, опыт. Но, этот механизм интуитивного решения случаен, иррационален, так как связан с бессознательной частью психики человека.

2.3 Специфика математического познания

В характеристике математического мышления, а точнее, его конкретно-исторической формы – стиля математического мышления, его сущности выделяют четыре общие для всех эпох черты, заметно отличающие этот стиль от стилей мышления в других науках.

Во-первых, для математика характерна доведенное до предела ***доминирование логической схемы рассуждения.*** Математик, потерявший, хотя бы временно, из виду эту схему, вообще лишается возможности научно мыслить. Эта своеобразная черта стиля математического мышления имеет в себе много ценного. Очевидно, что она в максимальной степени позволяет следить за правильностью течения мысли и гарантирует от ошибок; с другой стороны, она заставляет мыслящего при анализе иметь перед глазами всю совокупность имеющихся возможностей и обязывает его учесть каждую из них, не пропуская ни одной (такого рода пропуски вполне возможны и фактически часто наблюдаются при других стилях мышления).

Во-вторых, ***лаконизм***, т.е. сознательное стремление всегда находить кратчайший ведущий к данной цели логический путь, беспощадное отбрасывание всего, что не абсолютно необходимо для безупречной полноценности аргументации. Математическое сочинение хорошего стиля не терпит никакой “воды”, никаких украшающих, ослабляющих логическое напряжение речей, отвлечений в сторону; предельная скупость, суровая строгость мысли и ее изложения составляют неотъемлемую черту математического мышления. Черта эта имеет большую ценность не только для математического, но и для любого другого серьезного рассуждения. Лаконизм, стремление не допускать ничего излишнего, помогает и самому мыслящему, и его читателю или слушателю полностью сосредоточиться на данном ходе мыслей, не отвлекаясь побочными представлениями и не теряя непосредственного контакта с основной линией рассуждения.

Научные деятели, как правило, мыслят и выражаются лаконично во всех областях знания, даже тогда, когда мысль их создает и излагает принципиально новые идеи. Какое величественное впечатление производит, например, благородная скупость мысли и речи величайших творцов физики: Ньютона, Эйнштейна, Нильса Бора! Может быть, трудно найти более яркий пример того, какое глубокое воздействие может иметь на развитие науки именно стиль мышления ее творцов.

Для математики лаконизм мысли является непререкаемым, канонизированным веками законом. Всякая попытка обременить изложение не обязательно нужными (пусть даже приятными и увлекательными для слушателей) картинами, отвлечениями, разглагольствованиями заранее ставится под законное подозрение и автоматически вызывает критическую настороженность.

В-третьих, ***четкая расчлененность хода рассуждений***. Если, например, при доказательстве какого-либо предложения мы должны рассмотреть четыре возможных случая, из которых каждый может разбиваться на то или другое число подслучаев, то в каждый момент рассуждения математик должен отчетливо помнить, в каком случае и подслучае его мысль сейчас обретается и какие случаи и подслучаи ему еще остается рассмотреть. При всякого рода разветвленных перечислениях математик должен в каждый момент отдавать себе отчет в том, для какого родового понятия он перечисляет составляющие его видовые понятия. В обыденном, не научном мышлении мы весьма часто наблюдаем в таких случаях смешения и перескоки, приводящие к путанице и ошибкам в рассуждении. Часто бывает, что человек начал перечислять виды одного какого-нибудь рода, а потом незаметно для слушателей (а часто и для самого себя), пользуясь недостаточной логической отчетливостью рассуждения, перескочил в другой род и заканчивает заявлением, что теперь оба рода расклассифицированы; а слушатели или читатели не знают, где пролегает граница между видами первого и второго рода.

Для того чтобы сделать такие смешения и перескоки невозможными, математики издавна широко пользуются простыми внешними приемами нумерации понятий и суждений, иногда (но гораздо реже) применяемыми и в других науках. Те возможные случаи или те родовые понятия, которые надлежит рассмотреть в данном рассуждении, заранее перенумеровываются; внутри каждого такого случая те подлежащие рассмотрению подслучаи, которые он содержит, также перенумеровываются (иногда, для различения, с помощью какой-либо другой системы нумерации). Перед каждым абзацем, где начинается рассмотрение нового подслучая, ставится принятое для этого подслучая обозначение (например, II 3, -это означает, что здесь начинается рассмотрение третьего подслучая второго случая, или описание третьего вида второго рода, если речь идет о классификации). И читатель знает, что до тех пор, покуда он не натолкнется на новую числовую рубрику, всё излагаемое относится только к этому случаю и подслучаю. Само собою разумеется, что такая нумерация служит лишь внешним приемом, очень полезным, но отнюдь не обязательным, и что суть дела не в ней, а в той отчетливой расчлененности аргументации или классификации, которую она и стимулирует, и знаменует собою.

В-четвертых, скрупулезная точность символики, формул, уравнений. То есть “каждый математический символ имеет строго определенное значение: замена его другим символом или перестановка на другое место, как правило, влечет за собою искажение, а подчас и полное уничтожение смысла данного высказывания”.

Выделив основные черты математического стиля мышления, необходимо заметить, что математика (особенно математика переменных величин) по своей природе имеет диалектический характер, а следовательно, способствует развитию диалектического мышления. Действительно, в процессе математического мышления происходит взаимодействие наглядного (конкретного) и понятийного (абстрактного). “Мы не можем мыслить линии, – писал Кант, – не проведя её мысленно, не можем мыслить себе три измерения, не проведя из одной точки трех перпендикулярных друг к другу линий”.

Взаимодействие конкретного и абстрактного “вело” математическое мышление к освоению новых и новых понятий и философских категорий. В античной математике (математике постоянных величин) таковыми были “число” и “пространство”, которые первоначально нашли отражение в арифметике и евклидовой геометрии, а позже в алгебре и различных геометрических системах. Математика переменных величин “базировалась” на понятиях, в которых отражалось движение материи, - “конечное”, “бесконечное”, “непрерывность”, “дискретное”, “бесконечно малая”, “производная” и т.п.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение математики
2. Назовите основные онтологические философские проблемы математики
3. Назовите основные эпистемологические философские проблемы математики
4. В чем суть фундаменталистского подхода к философии математики?
5. В чем особенность нефундаменталистского подхода к философии математики?
6. В чем суть парадокса Рассела?
7. С чем связан кризис в математике начала 20 века?
8. Охарактеризуйте основные направления в математике: логицизм, формализм, интуиционизм.
9. В чем сущность проблемы математического объекта?*
10. Назовите методы математической гипотезы и математического моделирования.
11. Назовите основные периоды в истории развития математики
12. Какова структура математического знания?
13. В чем состоит специфика математического познания?

Литература

1. Бессонов, Б. Н. История и философия науки : учебное пособие для вузов / Б. Н. Бессонов. — 2-е изд., доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 293 с.
2. *Ивин, А. А.* Философия науки в 2 ч. Часть 1 : учебник для вузов / А. А. Ивин. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 287 с.
3. *Ивин, А. А.* Философия науки в 2 ч. Часть 2 : учебник для вузов / А. А. Ивин. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 244 с.
4. История и философия науки : учебник для вузов / А. С. Мамзин [и др.] ; под общей редакцией А. С. Мамзина, Е. Ю. Сиверцева. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 360 с.
5. История и философия науки : учебное пособие для вузов / Н. В. Бряник, О. Н. Томюк, Е. П. Стародубцева, Л. Д. Ламберов. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 290 с.
6. *Лебедев, С. А.* Философия науки : учебное пособие для магистров / С. А. Лебедев. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2015. — 296 с.
7. *Ушаков, Е. В.* Философия и методология науки : учебник и практикум для вузов / Е. В. Ушаков. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 392 с.

8. Философия науки : учебник для вузов / А. И. Липкин [и др.] ; под редакцией А. И. Липкина. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020.