

# Шкалы измерений



# Типы данных

- **качественные (нечисловые)**
- **количественные (числовые)**

**Примеры:**

**пол, социальное положение и температура, вес, рост человека**

**Измерение – присвоение символов подопытным образцам в соответствии с некоторым правилом**

# Аксиомы тождества

## Аксиомы тождества:

1. Либо  $A=B$  , либо  $A \neq B$  .
2. Если  $A=B$ , то  $B=A$ .
3. Если  $A=B$  и  $B=C$ , то  $A=C$  .

## Аксиомы рангового порядка

4. Если  $A > B$ , то  $B < A$  .
5. Если  $A > B$  и  $B > C$ , то  $A > C$  .

## Аксиомы аддитивности

6. Если  $A=P$  и  $B > 0$ , то  $A+B > P$  .
7.  $A+B=B+A$ .
8. Если  $A=P$  и  $B=Q$ , то  $A+B=P+Q$  .
9.  $(A+B)+C=A+(B+C)$

# Теория шкал измерений

$\Phi = \{\varphi(x)\}$

## Типы шкал для качественных измерений

- наименований (номинальная)
- порядковая (ординальная)
- гиперпорядка

## • Типы шкал для количественных измерений

- интервальная
- отношений
- разностей
- абсолютная

# Качественные измерения. *Шкала наименований*



**Логическая основа – первые 3 аксиомы  
Группа допустимых преобразований: взаимно  
однозначные преобразования.  
Арифметические операции не имеют смысла.**

**Параметр сдвига (среднего) - мода распределения,  
которая не зависит от однозначных преобразовани  
измерений.**

***Пример.* Гипертоников больше, чем гипотоников. Мода  
описывает параметр сдвига для гипертоников и  
гипотоников вне зависимости от обозначений: ГП и  
ГИП, 1 и 2. Измерения качественные, однако можно  
вычислить число объектов каждого класса и  
определить частоты.**

# Качественные измерения.

## *Порядковая шкала*

Измерения разбиваются на классы, которые упорядочиваются.

В порядковых шкалах нельзя определить меру доминирования, т.е. измерить, насколько один объект лучше, важнее другого.

Слабый порядок (изменяются аксиомы):

4. Либо  $A \geq B$ , либо  $B \leq A$ .
5. Если  $A \geq B$  и  $B \geq C$ , то  $A \geq C$

Если ни  $A \geq B$ , ни  $A \leq B$ , то говорят, что  $A$  и  $B$  несравнимы. Если одновременно  $A \geq B$  и  $A \leq B$ , то получаем рефлексивное отношение  $A = B$ .

Преобразования в шкале порядка – монотонные функции  $\varphi(x)$ .

# Качественные измерения.

## *Порядковая шкала*

**Арифметические операции не имеют смысла. Нельзя за среднее взять среднеарифметическое. Характеристикой сдвига - медиана или мода распределения.**

***Методы анализа: непараметрические, не зависящие от параметрического семейства распределений. Знаки, ранги абсолютных значений и знаки их разностей, число инверсий.***

**Проверки гипотезы равенства медианы заданному значению, равенства двух медиан, методы дисперсионного анализа Крускала-Уоллиса и Фридмана, методы ранговой корреляции Кендалла и Спирмена**

# Качественные измерения. Порядковая шкала

*Пример 1.1.*

Порядковые шкалы:

**В медицине** – стадий гипертонической болезни по Мясникову, степени выраженности коронарной недостаточности по Фогельсону;

**В минералогии** – шкала твердости минералов Мооса (тальк – 1, гипс – 2, кальций – 3, флюорит – 4, апатит – 5, ортоклаз – 6, кварц – 7, топаз – 8, корунд – 9, алмаз – 10),

**В географии** – бофортова шкала ветров («штиль», «слабый ветер», «умеренный ветер»).

Шкала Бофорта для определения силы ветра.

Баллы Бофорта	Метры в секунду	Характеристика ветра
0	0—0,5	штиль
1	0,6—1,7	тихий
2	1,8—3,3	лёгкий
3	3,4—5,2	слабый
4	5,3—7,4	умеренный
5	7,5—9,8	свежий
6	9,9—12,4	сильный
7	12,5—15,2	крепкий
8	15,3—18,2	очень крепкий
9	18,3—21,5	шторм
10	21,6—25,1	сильный шторм
11	25,2—29,0	жесточкий шторм
12	Более 29	ураган



# Количественные измерения. Интервальная шкала



В интервальной шкале численные значения числовой системы измерений определяются с точностью до линейных преобразований

$$\varphi(x) = \alpha x + \beta, \quad \alpha > 0$$

Начало отсчета и единица измерения в этой шкале не фиксированы, и при переходе от одной системы измерений к другой они должны быть заданы

- *Пример 1.2.* Измерение температуры по Цельсию, Фаренгейту. Если  $x$  – температура по Фаренгейту,  $y$  – по Цельсию, то

$$y = (5/9)(x - 32) = 0,55x - 17,8$$

# Количественные измерения. Интервальная шкала



Действительно, пусть  $x_1, x_2, x_3, x_4$  – измерения признака в некоторой числовой системе, а  $\phi(x_1), \phi(x_2), \phi(x_3), \phi(x_4)$  – соответствующие им измерения этого же признака в другой числовой системе. Тогда

$$\frac{\phi(x_1) - \phi(x_2)}{\phi(x_3) - \phi(x_4)} = \frac{\alpha x_1 - \alpha x_2}{\alpha x_3 - \alpha x_4} = \frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_4}$$

Не обладают важными свойствами *аддитивности*, (аксиомы 6 – 9)

*Пример.* В интервальной шкале утверждение  $2 + 3 = 5$  бессмысленно, т.к.  $\alpha 2 + \beta + \alpha 3 + \beta \neq \alpha 5 + \beta$  при  $\beta \neq 0$

- но утверждение  $2 + 3 = 4 + 1$  осмысленно.

# Количественные измерения. Интервальная шкала



В интервальной шкале применимы оценки среднеарифметического, дисперсии, высших и смешанных моментов, процедуры сравнения средних арифметических для двух совокупностей объектов.

Если  $x_i, i = 1, \dots, n$  и  $y_i, i = 1, \dots, m$ , то

$$(1/n) \sum_{i=1}^n x_i > (1/m) \sum_{i=1}^m y_i$$

**эквивалентно**

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\alpha x_i + \beta) = \frac{\alpha}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \beta > \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\alpha y_i + \beta) = \frac{\alpha}{m} \sum_{i=1}^m y_i + \beta$$

# Количественные измерения. *Интервальная шкала*

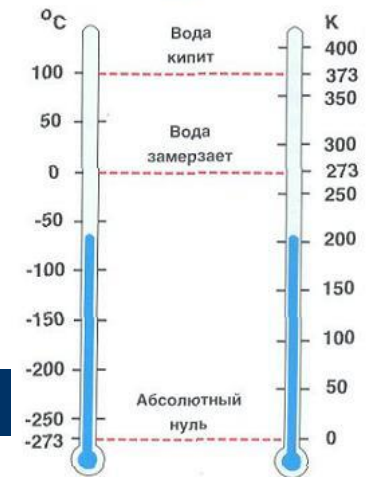


**Отношение среднеарифметических величин не имеет смысла.**

**Корректно лишь использование отношения разностей средних арифметических.**

**не имеет смысла коэффициент вариации – отношение среднеквадратического отклонения к математическому ожиданию, т.к. они зависят от начала отсчета**

# Количественные измерения. Шкала отношений



Численные значения числовой системы определяются с точностью до преобразований подобия

$$\phi(x) = \alpha x, \alpha > 0$$

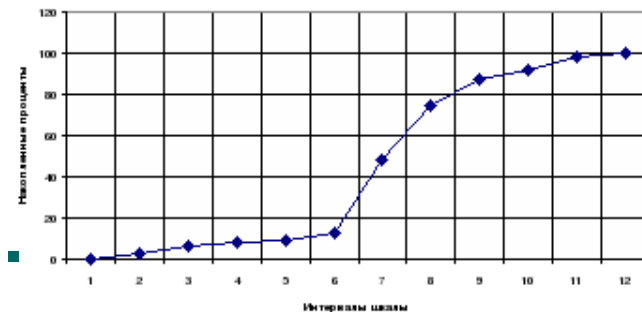
Свойство шкалы: при выборе любой системы измерений, отношение измерений одинаково при переходе от одной системы к другой.

Пусть измерения  $x_1$  и  $x_2$  в первой системе, а  $y_1 = \alpha x_1$ ,  $y_2 = \alpha x_2$  – в другой.

Тогда  $x_1 / x_2 = y_1 / y_2$ , то есть отношение любых двух точек шкалы не зависит от единицы измерения.

Имеет все свойства шкал количественных измерений, для нее справедливы свойства аддитивности (аксиомы 6 – 9)

# Количественные измерения. *Шкала разностей*



Единица измерения фиксирована, а начало отсчета – нет, т.е. при переходе от одной числовой системы к другой изменяется лишь начало отсчета.

Преобразование:  $\varphi(x) = x + \beta$ .

*Примеры.* Солнечные календари: Юлианский, Григорианский, Древнерусский, Великой Французской революции, Всемирный.

## **Количественные измерения.**

### ***Абсолютная шкала***

**Известны начало отсчета и единица измерения. Численные значения измерений равны тождественно значениям числовой оси.**  
***Пример.* Количество студентов в аудитории.**

**Преобразование – тождественное,  $\varphi(x) = x$ .**

**Имеют смысл все арифметические операции. В качестве оценки параметра сдвига могут использоваться среднее, медиана, мода распределения.**

# Количественные измерения. Преобразования шкал

Измерения	Шкала	Допустимые преобразования
Качественные	Наименований	$\varphi(x)$ – взаимно однозначные
	Порядковая	$\varphi(x)$ – монотонные
	Гиперпорядка	$\varphi(x)$ – монотонные, сохраняющие порядок первых разностей
Количественные	Интервальная	$\varphi(x) = \alpha x + \beta, \alpha > 0$
	Отношения	$\varphi(x) = \alpha x, \alpha > 0$
	Разностей	$\varphi(x) = x + \beta$
	Абсолютная	$\varphi(x) = x$

**Пример.** Измерения мощностей системы на входе и выходе. В  $N = 10 \ln(P_{\text{вых}}/P_{\text{вх}})$ , где  $P_{\text{вых}}$  и  $P_{\text{вх}}$  измеряются в шкале отношений и взятие логарифма допустимо



# Сравнительная таблица характеристик шкал

## Типы шкал и их свойства согласно классификации Стэнли Смирта Стивенса

		Номинальная шкала	Порядковая шкала	Интервальная шкала	шкала Отношений
Логические/ математически е операции	$\times$ ÷	X	X	X	✓
	+	X	X	✓	✓
	-	X	X	✓	✓
	$<$ $>$	X	✓	✓	✓
	= ≠	✓	✓	✓	✓

## Списки использованной литературы и источников:

Большаков А.А., Каримов Р.Н. «Методы обработки многомерных данных и временных рядов» - М. : Горячая линия: Телеком, 2014. - 522 с. : ил. ; 22 см. - Библиогр.: с. 504 (17 назв.). - Гриф: рек. УМО вузов по унив. политех. образованию в качестве учеб. пособия для студ. вузов, обуч. по напр. 230100( 654600)- "Информатика и вычислительная техника". - ISBN 5-93517-287-9 - 2-е изд., стереотип