Министерство образования и науки Российской Федерации

**Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования**

**Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет)**

Кафедра общей физики

# ПРЕДЕЛЬНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Авторы-составители:
Д. В. Александров, Л. Н. Каурова, И. В. Костина

Версия 04/02/2011

# ПРЕДИСЛОВИЕ

У лабораторного практикума по курсу общей физики две главные задачи:

1) Дать возможность студентам глубже изучить физические явления и процессы, рассматриваемые на лекциях и практических занятиях.

2) Помочь им приобрести навыки работы с измерительной аппаратурой, научить технике эксперимента, выработать психологию экспериментатора.

Нет ни одной сферы человеческой деятельности, где бы не использовались результаты измерений. В передовых странах примерно 15 % общественного труда затрачивается на проведение измерений. Диапазон измеряемых величин и их количество постоянно растут. Например, расстояния измеряют от $10^{-10}$ м до $10^{17}$ м, температуру — от 0,5 К до $10^{6}$ К, электрическое сопротивление — от $10^{-6}$ Ом до $10^{17}$ Ом, силу электрического тока — от $10^{-16}$ А до $10^{4}$ А, мощность — от $10^{-15}$ Вт до $10^{9}$ Вт. С увеличением диапазонов значений измеряемых величин возрастает и сложность измерений.

Одной из основных составляющих компетентности инженера и исследователя является умение правильно и рационально фиксировать полученную в ходе экспериментов измерительную информацию, проводить оценку достоверности и точности результатов.

Следует помнить, что в силу действия большого количества причин, часть которых изучается в физическом практикуме, ***ни одно измерение нельзя выполнить абсолютно точно***. Это общее правило, не имеющее никаких исключений. Приведём слова известного статистика Дайменда: «Погрешность также невозможно не допустить в лабораторный эксперимент, как невозможно не допустить бактерию в больницу».

Данные методические рекомендации адресованы студентам первого курса и имеют целью ознакомить их с простейшими приёмами обработки результатов косвенных измерений физических величин и помочь выполнить индивидуальное задание лабораторной работы № 0 «Оценка предельных погрешностей косвенных измерений».

Весь материал методических рекомендаций разделён на модули, которые можно изучать независимо один от другого. Перед началом проработки текстов этих модулей необходимо повторить: 1) понятие производной функции; 2) геометрический смысл производной; 3) правила дифференцирования и таблицу производных элементарных функций (см. Приложение 3).

## МАРШРУТНАЯ КАРТА

# 1. ИЗМЕРЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

*Измеряй всё доступное измерению и делай недоступное измерению доступным.*

*Галилео Галилей (1564 – 1642)*

## 1.1. Основные сведения об измерениях и средствах измерений

Для количественного описания различных свойств природных процессов и физических тел вводится понятие величины.

***Величина*** — это свойство чего-либо, которое может быть выделено среди других свойств и оценено тем или иным способом. *Величина* не существует сама по себе, о ней имеет смысл говорить лишь постольку, поскольку существует объект со свойствами, выраженными данной величиной.

Характеристику объектов и явлений материального мира, общую в качественном отношении для множества объектов и явлений, но индивидуальную для каждого из них в количественном отношении, называют ***физической величиной***. Например, длина – это физическая величина. С её помощью характеризуют многие тела, но для каждого из них она имеет индивидуальное количественное значение.

***Единицей физической величины*** называется физическая величина фиксированного размера, которой условно (обычно по международному соглашению) присвоено числовое значение, равное единице.

***Измерение физической величины*** заключается в нахождении опытным путём отношения её размера к размеру её единицы измерения. Другими словами, измерить величину — значит определить, во сколько раз она больше единицы измерения или какую часть единицы она составляет.

Полученное в результате измерения значение физической величины Q всегда состоит из двух частей: отвлечённого числа (числового значения) q и единицы измерения [Q], то есть

$$Q = q[Q] \ .$$

Это уравнение называют ***основным уравнением измерения.***

Надо отметить, что размер величины не зависит от выбора единицы измерения, а её числовое значение целиком определяется этим выбором.

Если, к примеру, утверждается, что масса тела 7 кг, то 7 кг – это значение массы тела, 7 – отвлечённое число, показывающее, во сколько раз масса данного тела больше массы эталона, у которого масса 1 кг.

Для практического осуществления измерений применяют технические средства с нормированными метрологическими[1)] характеристиками. Их называют ***средствами измерений*** или измерительной аппаратурой. В

---

[1)] Метрология – наука об измерениях, методах и средствах обеспечения их единства и способах достижения требуемой точности.

учебных лабораториях чаще всего используют три вида средств измерений: меры, измерительные приборы и измерительные установки.

***Мера*** — средство измерений, воспроизводящее физическую величину заданного размера. Например: гиря – мера массы; измерительный резистор – мера электрического сопротивления.

***Измерительные приборы*** — средства измерений, предназначенные для преобразования сигналов измерительной информации в форму, доступную для непосредственного восприятия наблюдателем. Например: термометр – прибор для измерения температуры; ваттметр – прибор для измерения мощности электрического тока.

Зачастую для проведения измерений недостаточно одного измерительного прибора. Тогда создаётся комплекс расположенных в одном месте функционально объединённых средств измерения и вспомогательных устройств. Такие комплексы называются ***измерительными установками***.

## 1.2. Классификация измерений

Любая классификация — условное группирование по заданным признакам. Одни и те же объекты могут быть классифицированы по разному. В таблице приведён один из вариантов классификации измерений. С этой классификацией необходимо ознакомиться перед выполнением лабораторных работ физического практикума.

| Основание классификации | Виды измерений |
|---|---|
| По числу выполненных измерений | • Однократные<br>• Многократные |
| По способу получения результата | • Прямые<br>• Косвенные<br>• Совместные |
| По уровню точности | • Прецизионные<br>• Контрольно-поверочные<br>• Технические |
| По способам обработки результатов | • Равноточные<br>• Неравноточные |

***Однократное*** измерение — это измерение, выполненное один раз. Во многих практических случаях проводятся именно однократные измерения, если их результат удовлетворяет условиям конкретной измерительной задачи.

***Многократным*** называют измерение физической величины одного размера, результат которого получается из нескольких следующих друг за другом измерений, то есть состоящее из ряда однократных измерений.

Многократные измерения необходимо выполнять в ситуациях, когда случайная составляющая погрешности (см. модуль 2) однократного измерения может превысить требуемое по условиям задачи значение.

***Прямыми*** называются измерения, в которых искомое значение физической величины находят непосредственно из опыта сравнением данной величины с мерой этой величины или из отсчёта показаний средства измерений, градуированного в единицах этой величины.

Примерами прямых измерений служат: измерение длины микрометром, массы – при помощи весов, электрического напряжения – вольтметром.

При ***косвенных*** измерениях искомую величину находят на основании известной функциональной зависимости между этой величиной и другими величинами, которые находят в результате прямых, а иногда и других видов измерений.

Косвенные измерения применяют тогда, когда прямые измерения какой-либо величины по каким-то причинам затруднены или вообще невозможны, или же когда косвенные измерения дают более точный результат.

В качестве примеров косвенных измерений можно привести определение плотности материала путём прямых измерений массы и объёма, электрического сопротивления – прямыми измерениями силы тока и напряжения с последующим расчётом по закону Ома.

Цель ***совместных*** измерений – установление функциональной зависимости между двумя величинами. Для отыскания зависимости типа $y = f(x)$ между разноимёнными величинами $x$ и $y$ последовательно измеряют значения $x$, одновременно измеряя соответствующее значение $y$.

***Прецизионные*** измерения – это измерения максимально возможной точности, достижимой при существующем в настоящее время уровне развития науки и техники. Их осуществляют чаще всего в метрологических центрах и в ведущих физических лабораториях.

***Контрольно-поверочные*** измерения, погрешность которых не должна превышать определённое заранее заданное контрольное значение, выполняют при поверке или калибровке средств измерений.

Самый распространённый вид измерений – ***технические*** (рабочие). Их проводят в промышленности, технике, в учебных лабораториях – везде, где погрешность измерений определяется применяемыми средствами измерений.

***Равноточными*** измерениями называется ряд измерений физической величины, проведённых одинаковыми по точности средствами измерений в одних и тех же условиях и с одинаковой тщательностью.

***Неравноточные*** измерения – это ряд измерений величины, выполненных различающимися по точности средствами измерений и/или в разных условиях.

## Вопросы для самоконтроля

1. Что такое физическая величина?
2. Что понимают под единицей физической величины?
3. В чём заключается измерение физической величины?
4. Что надо понимать под значением физической величины?
5. Что называют средствами измерений?
6. Чем отличаются друг от друга меры и измерительные приборы?
7. В чём различие между прямыми и косвенными измерениями?
8. В чём отличия контрольно-поверочных и технических измерений?
9. Объясните разницу между равноточными и неравноточными измерениями.

# 2. ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

## 2.1. Общие сведения о погрешностях

Любое измерение — процесс сравнения, то есть нахождения отношения размера физической величины к размеру той же величины, принятому за единицу. На практике это сравнение происходит в условиях, когда на него влияют множество случайных и неслучайных факторов и обстоятельств, учесть которые полностью и точно невозможно. Поэтому в результате выполнения процедуры измерения получают только приближённую оценку ***истинного значения физической величины*** – значения, которое идеальным образом характеризует в количественном и качественном отношении соответствующую физическую величину.

Очень распространённый приём обозначения оценки истинных значений и их погрешностей – добавление знака «~» к соответствующему символу. Например, $\tilde{x}$ – оценка истинного значения величины $x$.

Качество измерения считается тем выше, чем ближе результат измерения к истинному значению величины. Поскольку истинное значение принципиально не может быть найдено и используется лишь в теоретических исследованиях, в практической деятельности применяют действительное значение. (В международном общении используется так же термин «условное истинное значение».) По определению ***действительное значение физической величины*** – полученное экспериментальным путём значение величины, настолько близкое к её истинному значению, что в поставленной измерительной задаче может быть использовано вместо него. За действительное значение при однократных измерениях часто принимают значение, полученное с помощью более точного средства измерений, при многократных измерениях – ***среднее арифметическое*** результатов ряда отдельных измерений.

Качество результатов измерений и средств измерений характеризуют, указывая их погрешности. Погрешность количественно оценивается отклонением результата измерения величины от её истинного (действительного) значения. Это отклонение возможно в любую сторону, поэтому погрешность может быть как положительной, так и отрицательной. В связи с тем, что истинное значение величины неизвестно, а действительное значение отличается от истинного, погрешность никогда не известна точно.

## 2.2. Классификация погрешностей

Многообразие факторов, влияющих на погрешности, определяет их классификацию по нескольким признакам:

| Основание классификации | Виды погрешностей |
|---|---|
| Способ выражения | • Абсолютная<br>• Относительная<br>• Приведённая |
| Источник возникновения | • Инструментальная<br>• Методическая<br>• Субъективная |
| Характер изменения при повторных измерениях | • Систематическая<br>• Случайная<br>• Грубая<br>• Промах |

***Абсолютная погрешность*** выражается в единицах измеряемой величины. Для некоторой измеряемой величины $x$ абсолютная погрешность $\delta x$[2)] определяется как алгебраическая разность между измеренным $x_{изм}$ и истинным $x_{ист}$ (действительным $x_д$) значением этой величины:

$$\delta x = x_{изм} - x_{ист} \approx x_{изм} - x_д$$

Абсолютная погрешность сама по себе не может служить универсальным показателем точности измерений. Так, например, одно и то же значение абсолютной погрешности измерения длины, равное 1 мм, соответствует очень высокой точности при измерении длины комнаты, но эта же погрешность недопустимо велика при измерении диаметра проволоки для намотки катушки индуктивности.

Во многих случаях более наглядной характеристикой качества результата измерения служит ***относительная погрешность*** $e_x$, равная отношению абсолютной погрешности к истинному (действительному) значению величины:

$$e_x = \frac{\delta x}{x_{ист}} = \frac{x_{изм} - x_{ист}}{x_{ист}} \approx \frac{\delta x}{x_д} \approx \frac{x_{изм} - x_д}{x_д} \quad .$$

Относительная погрешность выражается в долях единицы или в процентах.

***Приведённая погрешность*** $\gamma$ — это относительная погрешность, в которой абсолютная погрешность средства измерения отнесена к условно принятому значению $x_N$, постоянному на всём диапазоне измерений или его части:

$$\gamma = \frac{\delta x}{x_N} = \frac{x_{изм} - x_д}{x_N}$$

Условно принятое значение называют ***нормирующим*** значением. Часто за нормирующее значение принимают верхний предел измерений на шкале прибора.

***Инструментальная погрешность*** обусловлена погрешностью

[2)] $\delta$ – строчная буква греческого алфавита «дельта»; $\delta x$ – единый символ, а не произведение.

применяемого средства измерений. Иногда её называют аппаратурной. Инструментальная погрешность — одна из наиболее существенных составляющих погрешности результата измерения.

***Методическая погрешность*** измерения вызывается следующими главными причинами:

- отличием принятой модели объекта измерения от модели, адекватно описывающей его свойство, которое определяется путём измерения;
- влиянием способов применения средств измерения;
- влиянием алгоритмов (формул), по которым производятся вычисления результатов измерения.

***Субъективная погрешность*** измерения обусловлена погрешностью отсчёта оператором показаний по шкале средства измерения. Она вызывается состоянием оператора, его положением во время работы, несовершенством органов чувств. Эта погрешность практически отсутствует при использовании цифровых и автоматизированных средств измерений.

Из общего определения погрешности измерения не следует, что она состоит из каких-либо составляющих. Деление погрешности на составляющие введено для удобства обработки результатов измерений.

В общем случае погрешность не является постоянной величиной. Многочисленными исследованиями установлено, что одна её часть проявляется как постоянная или закономерно изменяющаяся величина, а другая – изменяется непредсказуемо. Эти две части погрешности результата измерения назвали систематической и случайной погрешностями.

***Систематическая погрешность*** — составляющая погрешности измерения, остающаяся постоянной или закономерно меняющаяся при повторных измерениях одной и той же величины. Отличительный признак этого вида погрешностей заключается в том, что они, в принципе, могут быть предсказаны и обнаружены, после чего результат измерения уточняется путём введения ***поправки***. Поскольку поправки всегда находятся с некоторой неточностью, в окончательном результате измерения может оставаться ***неисключённая систематическая погрешность.***

Приведём примеры систематических погрешностей. Если указатель прибора находится не в плоскости шкалы, то отсчёт будет зависеть от положения глаза наблюдателя. Возникающая при этом погрешность называется параллактической[3]. Если показания прибора не равны нулю при равном нулю значении измеряемой величины, то имеет место погрешность места нуля.

***Случайная погрешность*** — составляющая погрешности результата измерения, изменяющаяся случайным образом (по знаку и значению) в серии повторных измерений физической величины постоянного размера, проведённых с одинаковой тщательностью в одинаковых условиях. Такие погрешности проявляются при повторных измерениях в виде некоторого

---

[3] Параллакс(греч. parallaxis) — кажущееся смещение объекта, вызванное изменением точки наблюдения

разброса полученных результатов. Описание случайных погрешностей возможно на основе теории случайных процессов и математической статистики. Уменьшить влияние случайных погрешностей можно путём увеличения числа измерений.

Случайные погрешности неустранимы и всегда присутствуют в любом эксперименте. Если предположить отсутствие систематических погрешностей, то случайные приводят к разбросу результатов многократных измерений относительно истинного значения (см. левый рисунок). Когда же имеется и существенная систематическая погрешность, то результаты разбросаны относительно смещённого значения (см. правый рисунок).


Случайные погрешности проявляются только в том случае, если используемый метод и измерительная аппаратура обладают достаточной чувствительностью. Отсутствие случайных расхождений результатов измерений говорит лишь о том, что значение случайных погрешностей меньше порога чувствительности, и они играют второстепенную роль по сравнению с систематическими.

При обработке результатов измерений приходится также считаться с возможностью появления грубых погрешностей и промахов.

***Грубой погрешностью*** называют погрешность, существенно превышающую ту, которая может быть оправдана условиями измерений, свойствами применяемых метода и аппаратуры, квалификацией экспериментатора. Такие погрешности могут возникать вследствие резких кратковременных изменений условий проведения измерений (сбои в работе аппаратуры, скачки напряжения в электросети, вибрации и т. п.)

***Промахи*** — следствия неправильных действий экспериментатора.

Результаты опытов, содержащие грубые погрешности и промахи следует всегда исключать из рассмотрения.

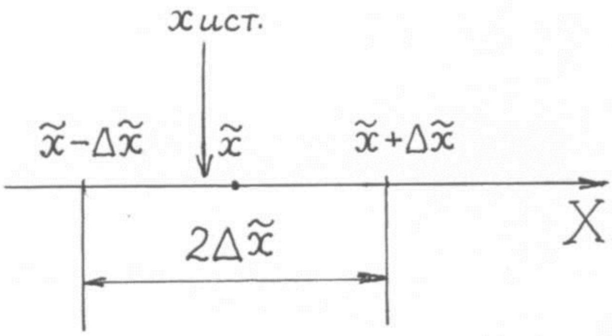
### 2.3. Предельные погрешности измерений

При проведении технических измерений и учебных лабораторных работ чаще всего случайные погрешности не определяют точность, поэтому отпадает необходимость в многократно повторяющихся измерениях. В промышленной и лабораторной практике прямые измерения постоянных величин выполняются, как правило, однократно. (Подчеркнём, что и в этих случаях рекомендуется проводить ещё хотя бы одно контрольное измерение, чтобы исключить грубые погрешности и промахи.) При этом точность результатов характеризуется ***предельной*** (*максимальной*) ***погрешностью.*** Это такая погрешность, которая может получиться, если все факторы, участвующие в формировании общей погрешности искомой величины вызовут отклонение от истинного значения в одну сторону. В школьном курсе физики эту погрешность называют границей абсолютной погрешности. Для обозначения ***предельной абсолютной погрешности*** будем использовать прописную греческую букву «дельта» Δ.

Если при измерении физической величины x получены оценка её истинного значения $\tilde{x}$ и оценка предельной абсолютной погрешности $\Delta\tilde{x}$, то это значит, что истинное значение $x_{èñò}$ этой величины находится в интервале:

$$(\tilde{x}-\Delta\tilde{x}) \le x_{ист} \le (\tilde{x}+\Delta\tilde{x})$$

Этот интервал можно назвать интервалом достоверных значений измеряемой величины, а половина его ширины и есть предельная абсолютная погрешность, которая всегда положительна.




С вероятностной точки зрения предельная абсолютная погрешность имеет две особенности.

Первая из них состоит в том, что истинное значение принадлежит интервалу $\left[\tilde{x} \pm \boldsymbol{\Delta}\tilde{x}\right]$ с вероятностью равной 100 %.

Вторая — в том, что использование интервала $\left[\tilde{x} \pm \Delta\tilde{x}\right]$ не предполагает ответа на вопрос, с какой вероятностью в различных его точках находится истинное значение.

Как уже отмечалось выше, указание одной абсолютной погрешности мало говорит о действительной точности, если не сопоставить значение погрешности и самой измеряемой величины. Поэтому качество измерений характеризуют оценкой ***предельной относительной погрешности***, которую будем обозначать строчной греческой буквой «эпсилон» с соответствующим индексом. Эта величина равна отношению оценки предельной абсолютной погрешности к оценке истинного значения:

$$\tilde{\varepsilon}_x = \frac{\Delta\tilde{x}}{\tilde{x}} \ .$$

Её выражают в долях единицы или в процентах. Если она определена, то предельную абсолютную погрешность можно найти как произведение: $\Delta\tilde{x} = \tilde{\varepsilon}_x \cdot \tilde{x}$ .

Заводы изготовители контролируют качество выпускаемых приборов и указывают в их паспортах информацию о максимально возможных отличиях показаний прибора от истинных значений измеряемых величин, т. е. о предельных относительных погрешностях. Подробно это будет изучаться в лаборатории электромагнитных явлений физического практикума.

Окончательная запись результата любого измерения физической величины $x$ с учётом найденной погрешности должна быть выполнена в ***стандартной форме***:

$$x = \left(\tilde{x} \pm \Delta\tilde{x}\right)$$

с указанием за скобками единицы измеряемой величины.

Такая запись означает, что

во-первых, наилучшая оценка экспериментатором искомой величины есть число $\tilde{x}$;

во-вторых, он уверен, что истинное значение этой величины находится где-то между $\tilde{x} - \Delta\tilde{x}$ и $\tilde{x} + \Delta\tilde{x}$.

### Вопросы для самоконтроля

1) Сформулируйте определение истинного значения физической величины.
2) Что понимают под действительным значением физической величины?
3) Как количественно оценивается погрешность измерения?
4) По каким признакам можно классифицировать погрешности?
5) Чем отличаются абсолютная и относительная погрешности?
6) Как определяется приведённая погрешность?
7) В чём заключается разница между систематическими и случайными погрешностями?
8) Что понимают под грубой погрешностью и промахом?
9) Что называется предельной погрешностью измерения?
10) Что понимают под предельной абсолютной погрешностью и интервалом достоверных значений измеряемой величины?
11) Какова структура стандартной формы записи результата измерения физической величины?

# 3. ПОГРЕШНОСТИ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Косвенные измерения предполагают использование расчётной формулы, связывающей искомую величину с величинами, которые находятся путём прямых измерений. Очевидно, что погрешность результата косвенного измерения должна зависеть как от погрешностей прямых измерений, так и от вида расчётной формулы. Чтобы получить выражение для оценки погрешности косвенно измеряемой величины, надо найти явный вид этой зависимости.

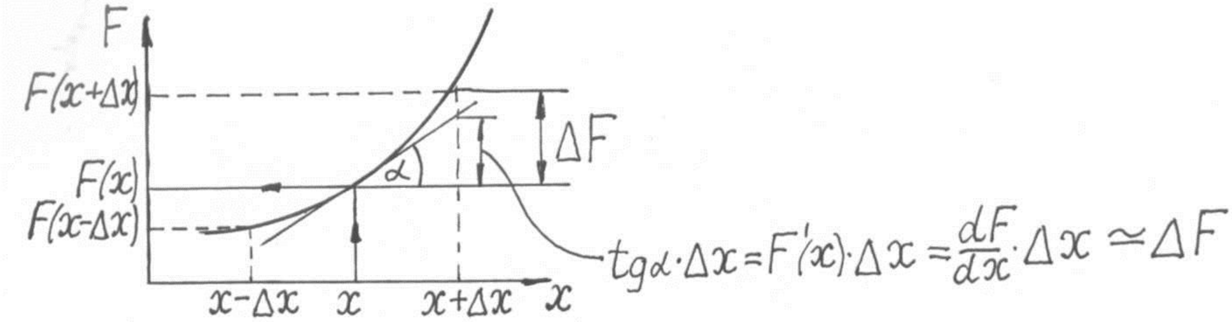
## 3.1. Погрешности функции одного аргумента

Сначала рассмотрим наиболее простой случай, когда для определения искомой величины $F$ необходимо измерить только одну вспомогательную величину $x$, т. е. когда $F$ — функция одного аргумента: $F = F(x)$.

Если оценка предельной абсолютной погрешности $\Delta x$ измеренного значения величины $x$ известна, то выражение для предельной абсолютной погрешности величины $F$ можно записать в виде:

$$\pm \Delta F = \pm \left| F\left(x \pm \Delta x\right) - F\left(x\right) \right|.$$

Знаки «±» показывают, что определяется интервал, в котором содержится истинное значение косвенно измеряемой величины. Если $\Delta x$ достаточно мала, что на практике почти всегда выполняется, то вблизи значения $x$ функцию $F(x)$ можно заменить линейной функцией. Графическую иллюстрацию такой замены можно изобразить следующим образом:

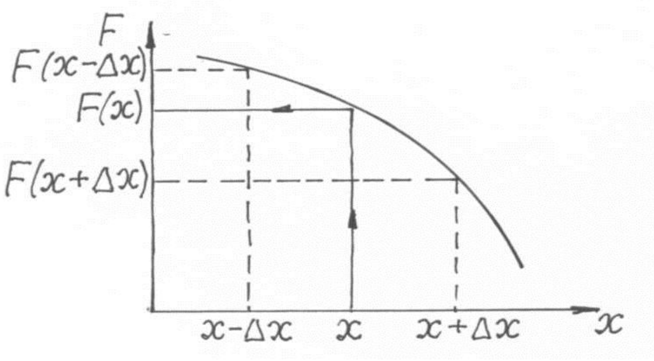



Из рисунка следует, что приращение функции $\Delta F$, вызванное приращением аргумента $\Delta x$, мало отличается от произведения тангенса угла наклона касательной к графику функции $\alpha$ на значение приращения аргумента $\Delta x$. Учитывая, что тангенс угла наклона касательной равен производной функции, можно получить приближённое выражение для абсолютной погрешности искомой величины:

$$\Delta F \cong F'(x)\Delta x \equiv \frac{dF(x)}{dx}\Delta x \ .$$

Ясно, что линейная часть приращения $\dfrac{dF(x)}{dx}\Delta x$ тем меньше отличается от полного приращения функции $F$, чем меньше значение $\Delta x$.

Если функция $F(x)$ убывающая, (см. следующий рисунок)




то максимальное значение *F*(*x*) соответствует минимальному значению (*x* – Δ*x*) величины *x*, так что $\Delta F = -\frac{dF}{dx}\Delta x$. Поскольку производная $dF/dx$ отрицательна, то можно записать $-\frac{dF}{dx}$ как $\left|\frac{dF}{dx}\right|$ и получить таким образом следующее общее правило:

**Абсолютная погрешность результата косвенного измерения в случае, когда искомая величина – функция одного аргумента.**

Пусть величина *x* измерена с абсолютной погрешностью Δ*x* и используется для вычисления величины *F*(*x*). Тогда абсолютная погрешность искомой величины Δ*F* равна произведению модуля производной функции *F* по переменной *x* на абсолютную погрешность этой переменной.

$$\pm|\Delta F| = \pm\left|\frac{dF}{dx}\right|\Delta x. \quad (*)$$

Относительную погрешность $\varepsilon_F$ величины *F* можно найти, разделив абсолютную погрешность на значение самой величины:

$$\pm\varepsilon_F = \pm\left(\frac{\Delta F}{|F|}\right) = \pm\frac{\left|\frac{dF}{dx}\right|\Delta x}{|F(x)|}.$$

Отношение $\frac{dF/dx}{F(x)}$ равно производной от натурального логарифма функции *F*. Учитывая это, сформулируем правило:

**Относительная погрешность результата косвенного измерения в случае, когда искомая величина – функция одного аргумента.**

Если величина *x* измерена с абсолютной погрешностью Δ*x* и используется для вычисления величины *F*(*x*), то относительная погрешность искомой величины $\varepsilon_F$ равна произведению модуля производной от натурального логарифма функции $F(x)$ на абсолютную погрешность её аргумента:

$$\pm\varepsilon_F = \pm\left(\left|\frac{\Delta F}{F}\right|\right) = \pm\left|\frac{d\ln F(x)}{dx}\right|\Delta x.$$

### 3.2. Погрешности функции нескольких аргументов

Формулы погрешностей для функции одной переменной надо распространить на случай функции нескольких переменных. Пусть искомая величина $F$ определяется на основании прямых измерений $n$ величин $x_1, x_2, ..., x_n$, то есть $F = F(x_1, x_2, ..., x_n)$. Предельная абсолютная погрешность этой функции

$$\pm \Delta F = \pm\left|F(x_1 + \Delta x_1,\, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n,) - F(x_1, x_2, ..., x_n)\right|$$

определяется значениями абсолютных погрешностей $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ аргументов и, конечно, видом функции $F$. Искомую абсолютную погрешность можно представить в виде суммы:

$$\pm \Delta F = \pm\left(|\Delta F_1| + |\Delta F_2| + ... + |\Delta F_n|\right) \ ,$$

где $\Delta F_1$, $\Delta F_2$, и т. д. – вклады в общую погрешность косвенного измерения, вызванные погрешностями соответствующих аргументов. Эти величины называются частными погрешностями. Выражения для них можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
\Delta F_1 &= \left|F(x_1 \pm \Delta x_1, x_2, ..., x_n) - F(x_1, x_2, ..., x_n)\right|, \\
\Delta F_2 &= \left|F(x_1, x_2 \pm \Delta x_2, ..., x_n) - F(x_1, x_2, ..., x_n)\right|, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Delta F_n &= \left|F(x_1, x_2, ..., x_n \pm \Delta x_n) - F(x_1, x_2, ..., x_n)\right|.
\end{aligned}$$

Следует ещё раз подчеркнуть, что складываются модули частных погрешностей, т. к. ищется предельная (максимальная) погрешность величины $F$, которая может возникнуть, если все погрешности в определении аргументов вызывают отклонение искомой величины в одну сторону.

Для нахождения каждой из частных погрешностей воспользуемся формулой (*), полученной для случая функции одной переменной. В этой формуле при нахождении производной надо считать все аргументы кроме того, для которого определяется частная погрешность, постоянными величинами. Такие производные называются частными производными и обозначаются следующим образом: $\dfrac{\partial F}{\partial x_1}, \dfrac{\partial F}{\partial x_2}, ..., \dfrac{\partial F}{\partial x_n}$. (Следует обратить внимание на то, что надо использовать только символ $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$, а не $\dfrac{dF}{dx_i}$). С учётом этого получится, что

$$\Delta F_1 = \left|\frac{\partial F}{\partial x_1}\right|\Delta x_1, \quad \Delta F_2 = \left|\frac{\partial F}{\partial x_2}\right|\Delta x_2, \quad \ldots, \quad \Delta F_n = \left|\frac{\partial F}{\partial x_n}\right|\Delta x_n.$$

Тогда можно сформулировать следующее важное правило:

**Абсолютная предельная погрешность результата косвенного измерения в случае, когда искомая величина – функция нескольких аргументов.**

Пусть величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ измерены с абсолютными погрешностями $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ и используются для вычисления величины $F = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, тогда абсолютная предельная погрешность искомой величины $\Delta F$ равна сумме произведений модулей частных производных функции $F$ по всем переменным на значения соответствующих абсолютных погрешностей аргументов:

$$\pm\Delta F = \pm\left(\left|\frac{\partial F}{\partial x_1}\right|\Delta x_1 + \left|\frac{\partial F}{\partial x_2}\right|\Delta x_2 + \ldots + \left|\frac{\partial F}{\partial x_n}\right|\Delta x_n\right),$$

или в компактном виде

$$\pm\Delta F = \pm\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial F}{\partial x_i}\right|\Delta x_i. \qquad (1)$$

Используя эту формулу на практике, надо учитывать, что при нахождении частной производной вида $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$ все остальные аргументы функции $F$ кроме $x_i$ считаются постоянными, а дифференцирование по переменной $x_i$ производится по правилам дифференцирования функции одной переменной (см. приложение 3).

Предельная относительная погрешность $\varepsilon_F$ величины $F$ находится делением выражения для $\Delta F$ на косвенно определяемую величину:

$$\pm\varepsilon_F = \pm\frac{\Delta F}{|F|} \pm \left(\left|\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial x_1}\right|\Delta x_1 + \left|\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial x_2}\right|\Delta x_2 + \ldots + \left|\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial x_n}\right|\Delta x_n\right).$$

Учитывая, что $\left|\dfrac{1}{F}\dfrac{\partial F}{\partial x_i}\right| = \left|\dfrac{\partial \ln F}{\partial x_i}\right|$, окончательно получим ещё одно важное правило:

**<u>Относительная предельная погрешность результата косвенного измерения в случае, когда искомая величина – функция нескольких аргументов</u>**

Пусть величины $x_1, x_2, ..., x_n$ измерены с абсолютными погрешностями $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ и используются для вычисления величины $F = F(x_1, x_2, ..., x_n)$. Тогда относительная предельная погрешность $\varepsilon_F$ искомой величины равна сумме произведений модулей частных производных от натурального логарифма функции $F$ на значения соответствующих абсолютных погрешностей аргументов этой функции:

$$\pm\varepsilon_F = \pm\left(\left|\frac{\Delta F}{F}\right|\right) = \pm\left(\left|\frac{\partial \ln F}{\partial x_1}\right|\Delta x_1 + \left|\frac{\partial \ln F}{\partial x_2}\right|\Delta x_2 + ... + \left|\frac{\partial \ln F}{\partial x_n}\right|\Delta x_n\right),$$

или в компактном виде

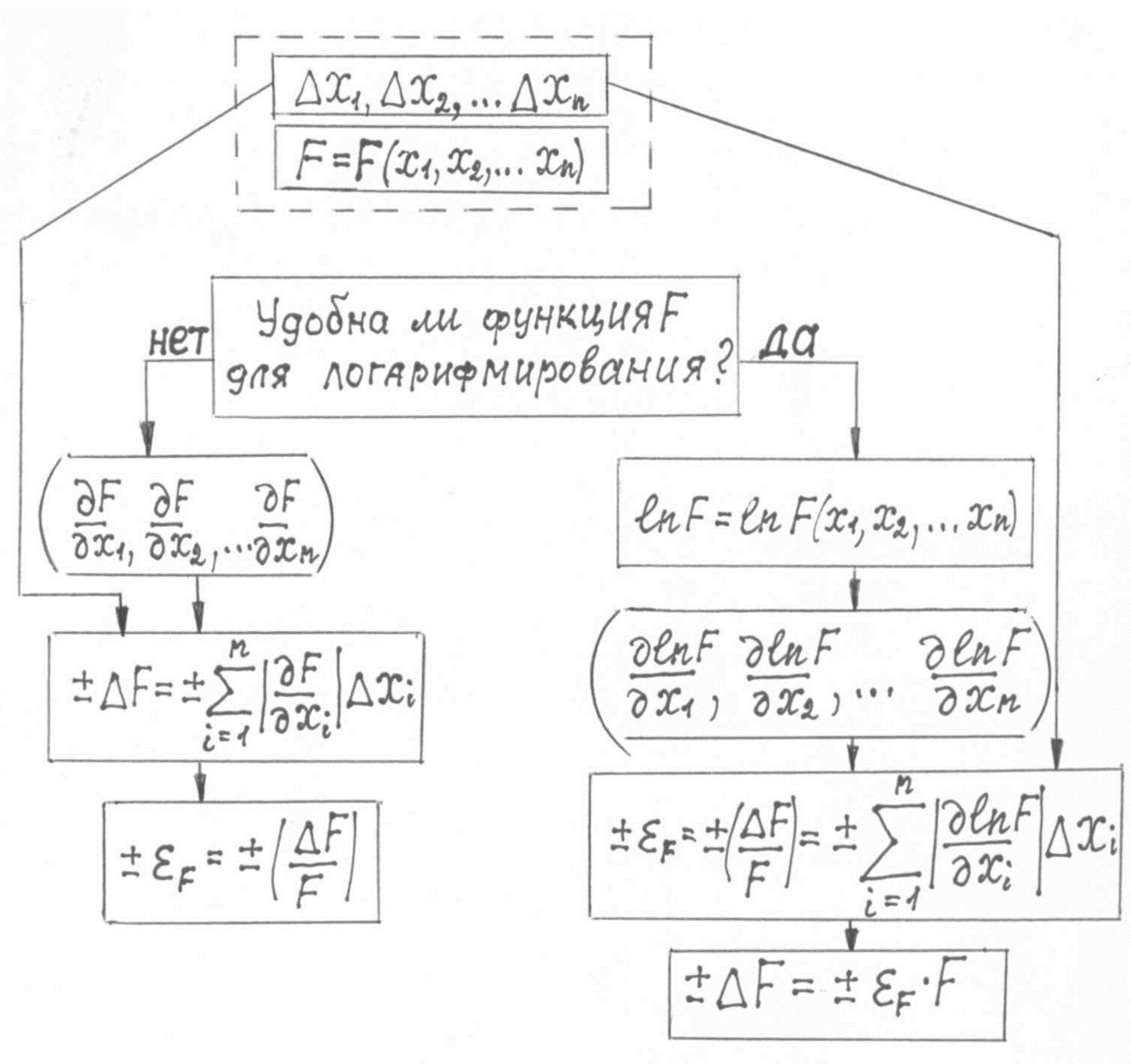
$$\pm\varepsilon_F = \pm\left(\left|\frac{\Delta F}{F}\right|\right) = \pm\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial \ln F}{\partial x_i}\right|\Delta x_i . \qquad (2)$$

Надо отметить, что у формул (1) и (2) схожая структура. Оба выражения – суммы и фактически являются правилами сложения частных погрешностей. Суммируются произведения некоторых весовых множителей (коэффициентов влияния) на абсолютные погрешности аргументов. В случае абсолютной погрешности весовые множители – частные производные от самой функции, а в случае относительной – частные производные от логарифма функции.

### 3.3. Нахождение предельных погрешностей в случае громоздкой расчётной формулы

Для косвенно измеряемых величин, определяемых ***по расчётным формулам удобным для логарифмирования, легче найти выражение для относительной погрешности.*** Оно проще по структуре и быстрее приводит к результату. В этом случае целесообразно сначала вывести формулу для относительной предельной погрешности и найти её численное значение. Затем, пользуясь соотношением между относительной и абсолютной погрешностями, определить ***только численное значение абсолютной погрешности*** как произведение относительной погрешности на значение искомой величины, т. е. $\pm\Delta F = \pm\varepsilon_F \cdot F$. При этом следует учитывать, что, если в расчётную формулу входит сомножителем сумма (разность) непосредственно измеряемых величин, то выражение ещё можно считать удобным для логарифмирования (см. пример 2).

Всё сказанное полезно изобразить в виде блок-схемы:




<u>Пример 1</u>. Вывести формулу для предельной погрешности величины $F = \dfrac{(a+c)^2}{a} - \dfrac{c^3}{b} + \dfrac{b}{a^2}$, если предельные абсолютные погрешности $\Delta a,\ \Delta b$ и $\Delta c$ известны.

Выражение для искомой величины неудобно для логарифмирования, поэтому нужно искать формулу для абсолютной погрешности. В расчётной формуле три аргумента, значит, в формуле для погрешности будет три слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение частной производной функции $F$ по одному из этих трёх аргументов на абсолютную погрешность соответствующего аргумента, т. е.

$$\pm \Delta F = \pm\left(\left|\frac{\partial F}{\partial a}\right|\Delta a + \left|\frac{\partial F}{\partial b}\right|\Delta b + \left|\frac{\partial F}{\partial c}\right|\Delta c\right)$$

Важно отметить, что при поиске производных надо дифференцировать только те слагаемые, в которые входит переменная, по которой ищется производная. Так, при определении производной по переменной $a$ надо дифференцировать только первое и последнее слагаемое. Кроме этого следует учесть, что в первом слагаемом величина $a$ входит и в числитель, и в знаменатель, следовательно, надо применять формулу для производной частного (см. приложение 3). В итоге

$$\pm\Delta F=\pm\left(\left|\frac{2(a+c)a-(a+c)}{a^2}-\frac{2b}{a^3}\right|\Delta a+\left|-\frac{c^3(-1)}{b^2}+\frac{1}{a^2}\right|\Delta b+\left|\frac{2(a+c)}{a}-\frac{3c^2}{b}\right|\Delta c\right).$$

<u>Пример 2</u>. Получить формулу для предельной погрешности величины $\lambda=\dfrac{r^2(a+b)}{2ab}$, если абсолютные погрешности величин $a,\ b$ и $r$ известны.

В данном случае расчётная формула удобна для логарифмирования и, значит, выгоднее найти формулу для относительной погрешности:

$$\pm\varepsilon_\lambda=\pm\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)=\pm\left(\left|\frac{\partial\ln\lambda}{\partial a}\right|\Delta a+\left|\frac{\partial\ln\lambda}{\partial b}\right|\Delta b+\left|\frac{\partial\ln\lambda}{\partial r}\right|\Delta r\right).$$

Поэтому сначала прологарифмируем выражение для искомой величины: $\ln\lambda=2\ln r+\ln(a+b)-\ln 2-\ln a-\ln b$ и учтём, что производная по какой-либо переменной от слагаемого, в котором этой переменной нет, равна нулю. Поэтому дифференцировать по любой из переменных следует лишь те слагаемые, в которые эта переменная входит. Напомним, что производная от натурального логарифма равна производной выражения стоящего под знаком логарифма, делённая на это выражение (см. приложение 3). Таким образом,

$$\pm\varepsilon_\lambda=\pm\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)=\pm\left(\left|\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a}\right|\Delta a+\left|\frac{1}{a+b}-\frac{1}{b}\right|\Delta b+\left|2\frac{1}{r}\right|\Delta r\right).$$

<u>Пример 3</u>. Получить формулу для предельной погрешности величины $Y=4\left(\dfrac{ml^2}{3}+ab^2\right)+\dfrac{cf^2}{2}+\dfrac{gp^2}{2}$, если известны предельные абсолютные погрешности всех аргументов в правой части расчётной формулы $\Delta m,\Delta l,\Delta a,\Delta b,\Delta c,\Delta f,\Delta g$ è $\Delta$р.

Перепишем выражение для искомой величины следующим образом:

$$Y=\frac{4}{3}ml^2+4ab^2+\frac{1}{2}cf^2+\frac{1}{2}gp^2.$$

Ясно, что расчётная формула представляет собой сумму и не может быть прологарифмирована. Однако все слагаемые независимы друг от друга и каждое из них логарифмируется. Поэтому представим выражение для $Y$ таким образом: $Y=Y_1+Y_2+Y_3+Y_4$ и учтём, что абсолютная погрешность

суммы равна сумме абсолютных погрешностей слагаемых, т. е.
$\Delta Y = \Delta Y_1 + \Delta Y_2 + \Delta Y_3 + \Delta Y_4$. Теперь можно сначала отдельно найти относительные погрешности всех членов суммы $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$ è $\varepsilon_4$ с помощью простых по структуре формул, а затем и соответствующие абсолютные погрешности на основании очевидных соотношений: $\Delta Y_1 = \varepsilon_1 Y_1$, $\Delta Y_2 = \varepsilon_2 Y_2$, $\Delta Y_3 = \varepsilon_3 Y_3$, $\Delta Y_4 = \varepsilon_4 Y_4$. Итак: $ln\, Y_1 = ln\left(\frac{4}{3}\right) + ln(m) + 2\, ln(l)$,

$$\varepsilon_{Y_1} = \pm\left(\left|\frac{\partial\, ln\, Y_1}{\partial m}\right|\Delta m + \left|\frac{\partial\, ln\, Y_1}{\partial l}\right|\Delta l\right) = \pm\left(\left|\frac{1}{m}\right|\Delta m + 2\left|\frac{1}{l}\right|\Delta l\right);$$

$$ln\, Y_2 = ln(4) + ln(a) + 2\, ln(b),$$

$$\varepsilon_{Y_2} = \pm\left(\left|\frac{\partial\, ln\, Y_2}{\partial a}\right|\Delta a + \left|\frac{\partial\, ln\, Y_2}{\partial b}\right|\Delta b\right) = \pm\left(\left|\frac{1}{a}\right|\Delta a + 2\left|\frac{1}{b}\right|\Delta b\right);$$

$$ln\, Y_3 = ln\left(\frac{1}{2}\right) + ln(c) + 2\, ln(f),$$

$$\varepsilon_{Y_3} = \pm\left(\left|\frac{\partial\, ln\, Y_3}{\partial c}\right|\Delta c + \left|\frac{\partial\, ln\, Y_3}{\partial f}\right|\Delta f\right) = \pm\left(\left|\frac{1}{a}\right|\Delta c + 2\left|\frac{1}{f}\right|\Delta f\right);$$

$$ln\, Y_4 = ln\left(\frac{1}{2}\right) + ln(g) + 2\, ln(p),$$

$$\varepsilon_{Y_4} = \pm\left(\left|\frac{\partial\, ln\, Y_4}{\partial g}\right|\Delta g + \left|\frac{\partial\, ln\, Y_4}{\partial p}\right|\Delta p\right) = \pm\left(\left|\frac{1}{g}\right|\Delta g + 2\left|\frac{1}{p}\right|\Delta p\right).$$

Окончательно:

$$\Delta Y = \pm\left[\left(\left|\frac{1}{m}\right|\Delta m + 2\left|\frac{1}{l}\right|\Delta l\right)\frac{4}{3}ml^2 + \left(\left|\frac{1}{a}\right|\Delta a + 2\left|\frac{1}{b}\right|\Delta b\right)4ab^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\left|\frac{1}{c}\right|\Delta c + 2\left|\frac{1}{f}\right|\Delta f\right)\frac{1}{2}cf^2 + \left(\left|\frac{1}{g}\right|\Delta g + 2\left|\frac{1}{p}\right|\Delta p\right)\frac{1}{2}gp^2\right].$$

## Вопросы для самоконтроля

1) В чём состоит особенность косвенных измерений?
2) От чего зависит погрешность результата косвенного измерения?
3) С помощью какого приближения выводится формула для погрешности функции одной переменной?
4) Как формулируется правило для нахождения предельной абсолютной погрешности функции одного аргумента?
5) Как формулируется правило для нахождения предельной относительной погрешности функции одного аргумента?
6) Что такое частные погрешности?
7) Что понимают под частной производной?
8) Как формулируется правило для нахождения предельной абсолютной погрешности функции нескольких переменных?
9) Как формулируется правило для нахождения предельной абсолютной погрешности функции нескольких аргументов?
10) На основании чего делают заключение: какую погрешность –абсолютную или относительную – найти легче?

# 4. ЗАПИСЬ ПРИБЛИЖЁННЫХ ЧИСЕЛ

## 4. 1. Цифры и числа

Любое число записывается с помощью определённой комбинации десяти цифр: 0, 1, 2, …, 9. В записи числа значение имеет не только сама цифра, но и её положение среди других цифр относительно запятой, которая отделяет дробную часть числа от целой. Положение цифры определяет разряд, количеству единиц которого он соответствует. Разряды целых чисел отсчитываются влево от запятой: 1-й разряд – единицы, 2-й – десятки, 3-й – сотни, 4 – тысячи и т. д. Разряды десятичных дробей отсчитываются вправо от запятой. 1-й разряд – десятые, 2-й – сотые, 3-й – тысячные и т. д. Чем левее стоит цифра, тем старше её разряд.

## 4.2. Округление

При выполнении приближённых вычислений часто приходится округлять числа.

***Округлить*** число до некоторого разряда – значит **отбросить** все цифры, стоящие справа от этого разряда. Отброшенные цифры, стоящие слева от запятой (в разрядах целых), заменяются нулями. Надо отличать нули, возникающие в конце числа в результате округления, от точных нулей, обозначающих отсутствие в этом числе единиц последних разрядов. Например, в выражении 1 м = 1 000 мм все три нуля точные, т. к. один метр точно равен тысяче миллиметров, а при округлении числа 1013,2 до сотен получается число 1 000, в котором два последних нуля заменяют отброшенные цифры, а первый слева нуль – точный, поскольку он находился в этом разряде и до округления.

Разность между округляемым числом и округлённым представляет собой ***погрешность округления***. Погрешность округления не превышает половины единицы разряда последней сохраняемой цифры.

## 4.3. Верные, сомнительные и неверные цифры

Цифру называют ***верной*** (точной)¸если абсолютная предельная погрешность[4)] числа составляет менее одной единицы разряда этой цифры. Все цифры, стоящие, левее верной, также верны.

Следующую (т. е. стоящую правее) за крайней справа верной цифрой называют ***сомнительной*** цифрой.

Цифры, стоящие справа от сомнительной, называются ***неверными***. Неверные цифры должны быть отброшены путём округления как в исходных данных, так и в окончательном результате расчёта.

Например, в числе 1254,13±36,7 последняя верная цифра 2, т. к. она стоит в разряде сотен, а погрешность меньше одной сотни. Цифра 5, стоящая в разряде десятков, сомнительная, т. к. погрешность ± 36,7 больше одного

---

[4)] Абсолютной погрешностью приближённого числа называется модуль разности между приближённым числом и его точным значением.

десятка. Три последние цифры 4, 1 и 3 неверные. Это число следует записать, откинув неверные цифры и сохранив в погрешности только старшую цифру, в виде 1250±40.

### 4.4. Значащие и незначащие цифры

***Значащими*** цифрами называют верные и сомнительные цифры числа.

***Незначащими*** цифрами являются:

1) нули в начале числа, при помощи которых определяются разряды десятичных дробей в числах, меньше единицы;
2) нули в конце числа, заменяющие после округления отброшенные цифры;
3) неверные цифры, если они почему-либо не отброшены.

Нули в конце числа могут быть значащими цифрами, если они представляют собой верные, либо сомнительные цифры. Нули, стоящие в конце числа в разрядах десятичных дробей, – всегда значащие, т. к. неверные нули в этом случае всегда отбрасываются.

Если погрешность числа по каким-либо причинам не указывается, то все цифры этого числа считаются значащими кроме нулей слева (в начале числа), поскольку подразумевается, что погрешность меньше половины единицы разряда последней цифры, и, следовательно, все цифры верные.

Пример. Числа (505±6) и (12930±400) содержат по три значащие цифры. Число 15280 содержит пять значащих цифр, поскольку погрешность не указана.

**Подведём итог всего сказанного о записи приближённых чисел.**

1) Значащими цифрами называют все цифры числа, кроме нулей, стоящих левее первой, отличной от нуля цифры, и нулей, которые поставлены вместо неизвестных или отброшенных цифр.
2) В физических исследованиях принято писать только значащие цифры, особенно в окончательных результатах. Для этого в числе запятую ставят после первой отличной от нуля цифры, а всё число умножают на необходимую степень десяти (положительную или отрицательную). При этом нули, стоящие в начале числа, оказываются ненужными, а незначащие нули в конце числа отбрасывают.

Примеры предпочтительной записи приближённых чисел приведены в следующей таблице:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Произвольная запись чисел | 0,0348 | 1205 | 0,150 | 4580 | 0,000281 |
| Предпочтительная запись чисел | $3{,}48\cdot10^{-2}$ | $1{,}205\cdot10^{3}$ | $1{,}50\cdot10^{-1}$ | $4{,}580\cdot10^{3}$ | $2{,}81\cdot10^{-4}$ |

## Вопросы для самоконтроля

1) Что понимают под округлением чисел и погрешностью округления?
2) Дайте определение верных, сомнительных и неверных цифр в записи числа.
3) Объясните разницу между значащими и незначащими цифрами числа.
4) Какая запись приближённых чисел является предпочтительной?
5) Как стандартизована запись результатов и погрешностей измерений?
6) Сформулируйте правила округления в учебных лабораториях.
7) В чём заключаются общепринятые правила округления приближённых чисел?

## 5. ПРАВИЛА ЗАПИСИ И ОКРУГЛЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ И ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ

В целях единообразия представления результатов и погрешностей измерений их запись стандартизирована. Стандартом установлено, что

- в числовых значениях погрешности должно быть не более двух значащих цифр;
- наименьшие десятичные разряды оценок истинных значений измеряемых величин и оценок их погрешностей должны быть одинаковыми.

Это объясняется

- во-первых, тем, что исходными данными для расчёта погрешностей служат нормированные погрешности средств измерения, которые в соответствии с действующими государственными стандартами указываются всего с одной или с двумя значащими цифрами;
- во-вторых, тем, что методики суммирования погрешностей содержат существенные упрощения и позволяют выполнять лишь приближённые расчёты результирующей погрешности.

При выполнении округления оценки погрешности необходимо также учитывать следующее.

Если первая цифра в числовом выражении погрешности 1 или 2, то округление до одной значащей цифры приводит к большой дополнительной вычислительной ошибке, достигающей 30 % – 50 %. Например, при округлении числа 1,4 до 1, относительная вычислительная ошибка составит

$$\frac{1{,}4-1}{1{,}4} \approx 0{,}3\ (30\ \%).$$

Если же первой цифрой в числовом выражении погрешности является цифра 3 или большая, то ошибка округления сравнительно невелика. Например, при округлении числа 0,94 до 0,9, относительная вычислительная ошибка будет равна $(0{,}94 - 0{,}9)/0{,}94 \approx 0{,}04$ (4 %). В подобных случаях указание второй значащей цифры в окончательной записи оценки погрешности фактически будет дезинформацией, поскольку качество исходных данных и методика оценки погрешностей не позволяют обеспечить такую точность.

В учебных лабораториях и при выполнении технических измерений практикой установлены следующие ***правила округления*** рассчитанных значений оценок погрешностей и оценок истинных значений измеряемых величин (результатов измерения):

***Правило первое***. Вначале округляется оценка абсолютной погрешности. При этом сохраняется две значащие цифры, если первая из них 1 или 2, и одна — если первая из них 3 или больше.

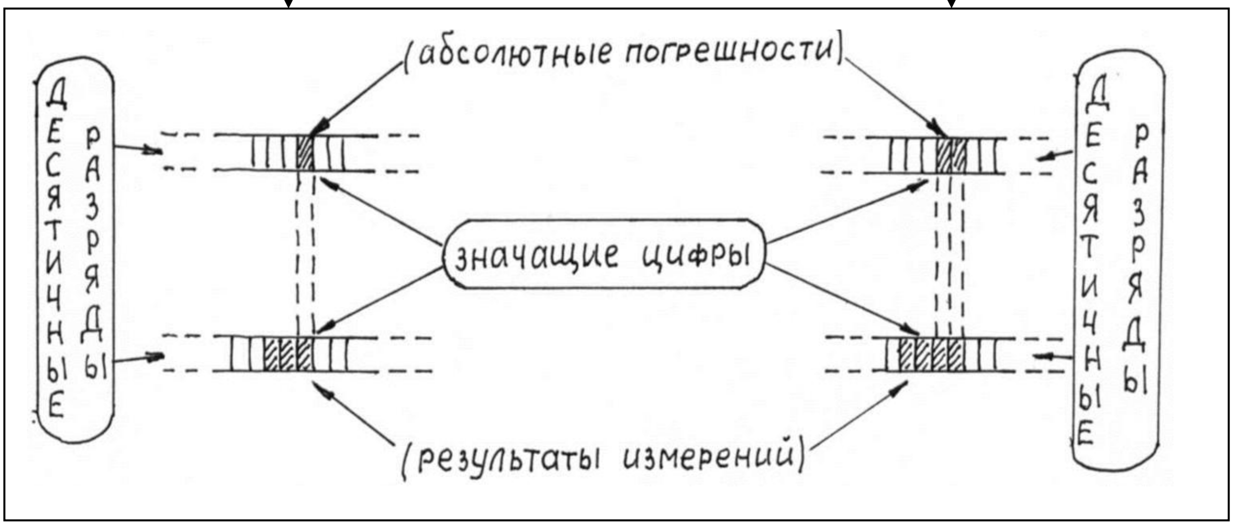
***Правило второе***. Оценка истинного значения измеряемой величины округляется до того же десятичного разряда, которым заканчивается округлённое значение абсолютной погрешности. Если десятичная дробь в числовом значении результата измерения оканчивается нулями, то нули отбрасываются до того разряда, который соответствует разряду числового значения погрешности.

Эти правила можно представить в виде блок-схемы, облегчающей их запоминание:

Если числовое значение абсолютной погрешности

| | |
|---|---|
| начинается с цифр 3, 4, 5, …, | начинается с цифры 1 или цифры 2 |
| при округлении сохраняется **<u>одна</u>** значащая цифра. | при округлении сохраняются **<u>две</u>** значащих цифры. |

Округлённый результат измерения должен оканчиваться цифрой того же разряда, что и округлённое значение его абсолютной погрешности



При выполнении округления конкретных числовых значений надо руководствоваться общепринятыми правилами округления приближённых чисел.

✓ Если цифра старшего из отбрасываемых разрядов меньше 5, то остающиеся цифры числа не изменяются. Лишние цифры в целых числах заменяются нулями, а в десятичных дробях отбрасываются.

Примеры. Числовое значение результата измерения 35,6342 при погрешности в пределах ±0,04 следует округлить до 85,63. То же число при погрешности в пределах ±0,012 следует округлить до 85,634.

Число 165245 при сохранении четырёх значащих цифр должно быть округлено до 165200; число 165,245 – до 165,2.

✓ Если цифра старшего из отбрасываемых разрядов больше или равна 5, но за ней следуют отличные от нуля цифры, то последнюю оставшуюся цифру увеличивают на единицу.

Примеры. При сохранении трёх значащих цифр число 18598 надо округлить до 18600; число 152,56 – до 153.

✓ Если отбрасываемая цифра равна 5, а следующие за ней цифры неизвестны или нули, то последнюю сохраняемую цифру числа не изменяют, если она чётная, и увеличивают на единицу, если она нечётная. При округлении погрешности увеличивается на единицу и чётная, и нечётная последняя сохраняемая цифра.

Примеры. Число 10,5 при сохранении двух значащих цифр округляют до 10; число 11,5 — до 12.

✓ Округления рекомендуется проводить лишь в окончательном вычислительном действии, а все предварительные вычисления проводить с одним – двумя лишними знаками.

Важно обратить внимание на то, что число значащих цифр не зависит от положения запятой и не изменяется при использовании множителя вида $10^n$. Так, например, в записях числа $0{,}250 = 2{,}50 \cdot 10^{-1} = 25{,}0 \cdot 10^{-2} = 0{,}0250 \cdot 10$ число значащих цифр составляет три.

Надо подчеркнуть также, что для указания количества значащих цифр в целом числе целесообразно записывать его с использованием множителя вида $10^n$. Действительно, по виду числа 2500 нельзя сказать, сколько в нём значащих цифр. Если же записано число $2{,}50 \cdot 10^3$, напротив, легко определить, что в данном случае число значащих цифр составляет три.

Пример. При измерении получено значение силы электрического тока 2,65 А, погрешность измерения ±0,06145 А. После округления результат должен быть представлен следующим образом I = (2,65 ± 0,06) А. Если же погрешность составляет ±0,006145 А, то результат представляют в виде I = (2,650 ± 0,006) А.

## 6. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Каждое выдаваемое студентам индивидуальное задание состоит из четырёх пунктов. Выполнение работы следует начинать с заполнения бланка титульного листа (см. приложение 1), где указывается номер группы, фамилия студента(ки) и номер варианта. Все записи надо делать на бумаге формата А4.

В ***первом пункте*** необходимо получить выражение для предельной абсолютной погрешности косвенного измерения $\Delta Y$, исходя из заданного выражения типа $Y=f(a,\ b,\ c,\ \ldots)$, которое неудобно для логарифмирования. Для этого надо применить общую формулу для абсолютной предельной погрешности (1), представив её в следующем виде:

$$\Delta Y = \pm\left\{\left|\frac{\partial Y}{\partial a}\right|\Delta a + \left|\frac{\partial Y}{\partial b}\right|\Delta b + \left|\frac{\partial Y}{\partial c}\right|\Delta c + \ldots\right\}.$$

Поскольку абсолютные предельные погрешности величин $a,\ b,\ c,\ \ldots$ и т. д. считаются заданными, то получение выражения для абсолютной предельной погрешности величины $Y$ сведётся к нахождению частных производных $\left|\frac{\partial Y}{\partial a}\right|$, $\left|\frac{\partial Y}{\partial b}\right|$, $\left|\frac{\partial Y}{\partial c}\right|$, и т. д. Не следует забывать, что при нахождении частных производных, например, по переменной $b$, все остальные переменные $a,\ c,\ \ldots$ и т. д. в момент дифференцирования считаются постоянными величинами. Таблица производных основных функций и правила дифференцирования приведены в приложении 3.

Выражение типа $Z = Z(a,\ b,\ c, \ldots.)$ во ***втором пункте*** индивидуального задания удобно для логарифмирования, поэтому нужно вывести формулу для предельной относительной погрешности, применив частный случай общей формулы (2) для относительной предельной погрешности в таком виде:

$$\varepsilon_Z \equiv \frac{\Delta Z}{Z} = \pm\left\{\left|\frac{\partial \ln Z}{\partial a}\right|\Delta a + \left|\frac{\partial \ln Z}{\partial b}\right|\Delta b + \left|\frac{\partial \ln Z}{\partial c}\right|\Delta c + \ldots\right\}.$$

Надо обратить внимание, что в этой формуле роль весовых множителей при сложении частных погрешностей играют частные производные от ***натурального логарифма искомой величины Z.*** Поэтому выполнение этого пункта задания надо начать с логарифмирования выражения для $Z$, а после этого нужно найти частные производные от $\ln Z$ по всем аргументам и записать выражение для $\varepsilon_Z$. Нельзя упускать из вида, что некоторые слагаемые в выражении для $\ln Z$ могут оказаться сложными функциями $a,\ b,\ c,\ \ldots$ и т. д.

**Третий пункт** задания посвящён отработке навыков округления числовых значений оценок абсолютных погрешностей и оценок истинных значений измеренных величин. Важно подчеркнуть, что ***начинать надо с округления оценки абсолютной погрешности*** и не забывать, что округлённое значение оценки абсолютной погрешности может содержать или одну, или максимум две значащие цифры (см. приведённые ранее «Правила округления результатов измерения»), а округлённая оценка истинного значения измеряемой величины должна заканчиваться в том же разряде, что и оценка погрешности.

***Четвёртый пункт*** задания представляет собой пример полной математической обработки результата косвенных измерений. Рекомендуется выполнять его в следующей последовательности:

1) Вывести формулу для погрешности величины $F$, которая является функцией трёх аргументов $F = F(A, B, C)$. Большинство этих формул в четвёртом пункте удобны для логарифмирования. В этом случае выгоднее вывести формулу для предельной относительной погрешности в соответствии с выражением

$$\varepsilon_F = \frac{\Delta F}{F} = \pm\left\{\left|\frac{\partial \ln F}{\partial A}\right|\Delta A + \left|\frac{\partial \ln F}{\partial B}\right|\Delta B + \left|\frac{\partial \ln F}{\partial C}\right|\Delta C\right\},$$

а оценку предельной абсолютной погрешности находить в дальнейшем как произведение числовых значений $\tilde{\varepsilon}_F$ и $\tilde{F}$, т. е. $\Delta\tilde{F} = \tilde{\varepsilon}_F \cdot \tilde{F}$. Если же исходное выражение для F неудобно для логарифмирования, то нужно будет вывести формулу для оценки предельной абсолютной погрешности

$$\Delta F = \pm\left\{\left|\frac{\partial F}{\partial A}\right|\Delta A + \left|\frac{\partial F}{\partial B}\right|\Delta B + \left|\frac{\partial F}{\partial C}\right|\Delta C\right\}$$

и далее использовать её для получения численного значения.

2) Используя численные значения сведённых в таблицу результатов многократных равноточных измерений величин $A$, $B$, $C$, найти их средние арифметические значения $<A>, <B>, <C>$.

3) Найти модули разностей результатов многократных измерений величин $A$, $B$ и $C$ от найденных в п. 2 средних значений, просуммировать их и разделить на число измерений. Таким образом будут найдены оценки предельных абсолютных погрешностей $\Delta\tilde{A}$, $\Delta\tilde{B}$ и $\Delta\tilde{C}$ как средние абсолютные погрешности:

$$\Delta\tilde{A} = \frac{|A_1 - <A>| + |A_2 - <A>| + \ldots + |A_{10} - <A>|}{10},$$

$$\Delta\tilde{B} = \frac{|B_1 - <B>| + |B_2 - <B>| + \ldots + |B_{10} - <B>|}{10},$$

$$\Delta\tilde{C} = \frac{|C_1 - <C>| + |C_2 - <C>| + \ldots + |C_{10} - <C>|}{10}.$$

4) Найти неокруглённое числовое значение величины $F$. Для этого в формулу $F = F\left(A, B, C\right)$ вместо A, B и C подставить найденные в п. 2) средние значения <A>, <B> и <C>.

5) Найти неокруглённое числовое значение оценки погрешности величины $F$. В зависимости от вида формулы для $F$ находится или сразу оценка абсолютной предельной погрешности $\Delta\tilde{F}$, или сначала оценка относительной предельной погрешности $\tilde{\varepsilon}_F$, а лишь затем оценка абсолютной предельной погрешности $\Delta\tilde{F} = \tilde{\varepsilon}_F \cdot \tilde{F}$.

При нахождении числовых значений $\tilde{\varepsilon}_F$ или $\Delta\tilde{F}$ в соответствующие формулы следует вместо A, B и C подставлять $< \tilde{A} >$, $< \tilde{B} >$и $< \tilde{C} >$, а вместо $\Delta A$, $\Delta B$ и $\Delta C$ найденные ранее числовые значения средних абсолютных погрешностей $\Delta\tilde{A}$, $\Delta\tilde{B}$, $\Delta\tilde{C}$.

6) Произвести округления числовых значений оценок предельной абсолютной погрешности и искомой величины $\boldsymbol{F}$ и записать окончательный результат в стандартной форме:

$$\tilde{F} = \left( \begin{bmatrix} \text{округлённая оценка} \\ \text{истинного значения} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} \text{округлённая оценка} \\ \text{предельной абсолютной} \\ \text{погрешности} \end{bmatrix} \right),$$

например $\tilde{F} = \left(27{,}5 \pm 0{,}3\right)$, $\tilde{\varepsilon}_F = 1{,}1\%$.

## ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА


1) Пустовалов Г.Е., Талалаева Е.В. Простейшие физические измерения и их обработка. – М.: Изд-во МГУ, 1967.
2) Рабинович С.Г. Погрешности измерений. – Л.: Энергия, 1978.
3) Бурдун Г.Д., Марков Б.Н. Основы метрологии. – М.: Изд-во стандартов, 1975.
4) Тюрин Н.И. Введение в метрологию. – М.: Изд-во стандартов, 1985.
5) Тейлор Д.М. Введение в теорию ошибок. Пер.с англ.- М.: Мир, 1985.
6) Деденко Л.Г., Керженцев В.В. Математическая обработка и оформление результатов эксперимента. – М.: Изд-во МГУ, 1977.
7) Лабораторные занятия по физике: Учеб.пособие /Гольдин Л.Л., Игошин Ф.Ф. и др./Под ред.Л.Л.Гольдина – М.: Наука, 1983.
8) Новицкий П.В., Зограф И.А. Оценка погрешностей результатов измерений. – Л.: Энергоатомиздат, 1991.
9) Грановский В.А., Сирая Т.Н. Методы обработки экспериментальных данных. – Л.: Энергоатомиздат, 1990.
10) Кабардина С.И., Шеффер Н.И. Измерения физических величин. Элективный курс; Учебное пособие /Под ред.О.Ф.Кабардина – М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2005.
11) Никифоров Г.Г. Погрешности измерений при выполнении лабораторных работ по физике. 7 – 11 кл. - М.: Дрофа, 2008.
12) Сергеев А.Г., Крохин В.В. Метрология: Учеб.пособие для вузов – Н.: Логос, 2002.
13) Дегтярев А.А. и др. Метрология: Учеб.пособие для вузов /Под ред.А.А.Дегтярева – М.: Академический проект, 2006.
14) Метрология, стандартизация, сертификация и электроизмерительная техника: Учеб.пособие /К.К.Ким, Г.Н.Анисимов и др. – Спб.: Питер, 2008.
15) Старовиков Н.И. Введение в экспериментальную физику: Учеб.пособие. – Спб.: Издательство <<Лань>>, 2008.
16) Алгебра и начало анализа: Учеб. для 10-11 кл. общеобразовательных учреждений Ш.А.Алимов, Ю.М.Калягин и др. – М.: Просвещение, 2010.
17) Васильев А.Н. История науки в коллекции монет. – М.: Бюро Квантум, 2007.
18) РМГ29–99. ГСИ. Метрология. Основные термины и определения.
19) Гост Р8.000–2000. ГСИ. Основные положения.
20) ГОСТ РИСО 5725–2002. Точность (правильность и прецизионность) методов и результатов измерений (части 1–6).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

На следующей странице находится образец бланка отчёта о лабораторной работе № 0

«Оценка предельных погрешностей косвенных измерений»

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет)

Кафедра общей физики

Отчёт о лабораторной работе № 0

«Оценка предельных погрешностей косвенных измерений»

Группа № ____________________
Студент(ка) ____________________
Преподаватель ____________________

Вариант задания № ____

Отчёт принят с оценкой ___________
« ____» ____________ 2011 г.
___________________________
(подпись преподавателя)

**Пример выполнения индивидуального задания**

1) Вывести формулу предельной абсолютной погрешности для величины $Y$.

$$Y = \frac{2b^2\sqrt{g}}{\sin^2 a} - \sqrt{\frac{\cos a}{b \cdot c}}$$

Вывод:

$$\Delta Y = \left|\frac{\partial Y}{\partial a}\right|\Delta a + \left|\frac{\partial Y}{\partial b}\right|\Delta b + \left|\frac{\partial Y}{\partial c}\right|\Delta c + \left|\frac{\partial Y}{\partial g}\right|\Delta g =$$

$$= \left|2b^2\sqrt{g}(-2)\frac{\cos a}{\sin^3 a} - \sqrt{\frac{1}{bc}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(-\sin a)}{\sqrt{\cos a}}\right|\Delta a +$$

$$= \left|\frac{2\sqrt{g}}{\sin^2 a} \cdot 2b - \sqrt{\frac{\cos a}{c}} \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{b^{3/2}}\right|\Delta b +$$

$$= \left|-\sqrt{\frac{\cos a}{b}} \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{c^{3/2}}\right|\Delta c + \left|\frac{2b^2}{\sin^2 a} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{g}}\right|\Delta g =$$

$$= \left|-4b^2\sqrt{g}\frac{\cos a}{\sin^3 a} + \frac{1}{2}\frac{\sin a}{\sqrt{bc\cos a}}\right|\Delta a +$$

$$+ \left|\frac{4b\sqrt{g}}{\sin^2 a} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\cos a}{c}} \cdot \frac{1}{b^{3/2}}\right|\Delta b + \left|\frac{1}{2c^{3/2}} \cdot \sqrt{\frac{\cos a}{b}}\right|\Delta c +$$

$$+ \left|\frac{b^2}{\sqrt{g}\sin^2 a}\right|\Delta g.$$

2) Вывести формулу предельной относительной погрешности для величины Z.

$$Z = 4f^3 \frac{(a+c)\sqrt{b+c}}{ab(a-b)}$$

Вывод:

$$\ln Z = \ln 4 + 3\ln f + \ln(a+c) + \frac{1}{2}\ln(b+c) - \ln a - \ln b - \ln(a-b);$$

$$\frac{\Delta Z}{Z} = \left|\frac{\partial \ln Z}{\partial f}\right|\Delta f + \left|\frac{\partial \ln Z}{\partial a}\right|\Delta a + \left|\frac{\partial \ln Z}{\partial b}\right|\Delta b + \left|\frac{\partial \ln Z}{\partial c}\right|\Delta c =$$

$$= \left|3\cdot\frac{1}{f}\right|\Delta f + \left|\frac{1}{a+c} - \frac{1}{a} - \frac{1}{a-b}\right|\Delta a +$$

$$+ \left|\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{b+c} - \frac{1}{b} - \frac{(-1)}{a-b}\right|\Delta b + \left|\frac{1}{a+c} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{b+c}\right|\Delta c =$$

$$= \left|\frac{3}{f}\right|\Delta f + \left|\frac{1}{a+c} - \frac{1}{a} - \frac{1}{a-b}\right|\Delta a +$$

$$+ \left|\frac{1}{2(b+c)} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a-b}\right|\Delta b + \left|\frac{1}{a+c} + \frac{1}{2(b+c)}\right|\Delta c.$$

3) Округления вычисленных значений оценок абсолютных предельных погрешностей результатов косвенных измерений и соответствующие округления числовых значений этих результатов.

| N п/п | Вычисленные числовые значения результатов косвенного измерения | Вычисленные значения оценок абсолютных погрешностей результатов косвенных измерений | Результаты округления числовых значений |
|---|---|---|---|
| 1 | 6051.78 | $\pm 30.249$ | $(6.05 \pm 0.03)\cdot 10^3$ |
| 2 | 0.08703 | $\pm 0.001342$ | $(8.70 \pm 0.13)\cdot 10^{-2}$ |
| 3 | 4.75 | $\pm 0.006427$ | $(4.750 \pm 0.006)$ |

1. Округление абсолютной погрешности:

$$30.249 \rightarrow 30$$

Округление результата измерения:

$$6051.78 \rightarrow 6050$$

Приведение результата измерения к стандартной форме:

$$(6050 \pm 30) = (6.05 \pm 0.03)\cdot 10^3.$$

2. $0.001342 \rightarrow 0.0013$

$0.08703 \rightarrow 0.0870$

$(0.0870 \pm 0.0013) = (8.70 \pm 0.13)\cdot 10^{-2}.$

3. $0.006427 \rightarrow 0.006$

$4.75 \rightarrow 4.750$

$(4.750 \pm 0.006)$

4) Обработка результатов косвенных измерений величины $F$, рассчитываемой по формуле:

$$F = C(A^2 - AB + B^2).$$

4.1 Вывод формулы предельной относительной погрешности $\varepsilon = \frac{\Delta F}{F}$.

$$\ln F = \ln C + \ln(A^2 - AB + B^2),$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta F}{F} = \left|\frac{\partial \ln F}{\partial C}\right| \Delta C + \left|\frac{\partial \ln F}{\partial A}\right| \Delta A + \left|\frac{\partial \ln F}{\partial B}\right| \Delta B =$$

$$= \left|\frac{1}{C}\right| \Delta C + \left|\frac{2A - B}{A^2 - AB + B^2}\right| \Delta A + \left|\frac{-A + 2B}{A^2 - AB + B^2}\right| \Delta B.$$

4.2 Обработка результатов прямых измерений величин $A$, $B$ и $C$.

| номер измерения | $A_i$ | $\Delta A_i = \lvert\langle A\rangle - A_i\rvert$ | $B_i$ | $\Delta B_i = \lvert\langle B\rangle - B_i\rvert$ | $C_i$ | $\Delta C_i = \lvert\langle C\rangle - C_i\rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 9.38 | 0.013 | 0.21 | 0.01 | 73.62 | 0 |
| 2 | 9.35 | 0.017 | 0.17 | 0.03 | 73.64 | 0.02 |
| 3 | 9.36 | 0.007 | 0.20 | 0 | 73.59 | 0.03 |
| 4 | 9.39 | 0.023 | 0.22 | 0.02 | 73.60 | 0.02 |
| 5 | 9.36 | 0.007 | 0.19 | 0.01 | 73.61 | 0.01 |
| 6 | 9.37 | 0.003 | 0.18 | 0.02 | 73.63 | 0.01 |
| 7 | 9.38 | 0.013 | 0.21 | 0.01 | 73.62 | 0 |
| 8 | 9.39 | 0.023 | 0.23 | 0.03 | 73.65 | 0.03 |
| 9 | 9.34 | 0.027 | 0.20 | 0 | 73.61 | 0.01 |
| 10 | 9.35 | 0.017 | 0.19 | 0.01 | 73.60 | 0.02 |
| средн. значен. | 9.367 | $\langle\Delta A\rangle = 0.015$ | 0.20 | $\langle\Delta B\rangle = 0.014$ | 73.62 | $\langle\Delta C\rangle = 0.015$ |

4.3 Нахождение числового значения величины F:

$$F = 73.62\left(9.367^2 - 9.367\cdot 0.20 + 0.20^2\right) = 6324{,}49$$

4.4. Вычисление предельной относительной погрешности величины F:

$$\varepsilon = \frac{\Delta F}{F} = \left|\frac{1}{73.62}\right| 0.015 + \left|\frac{2\cdot 9.367 - 0.20}{9.367^2 - 9.367\cdot 0.20 + 0.20^2}\right| 0.015 +$$

$$+ \left|\frac{-9.367 + 2\cdot 0.20}{9.367^2 - 9.367\cdot 0.20 + 0.20^2}\right| 0.014 = 0.00020 +$$

$$+ 0.00323 + 0.00146 = 0.00489\ (0.49\%).$$

4.5 Предельная абсолютная погрешность величины F равна

$$\Delta F = \varepsilon \cdot F = 0.00489 \cdot 6324{,}5 = 30.9 \rightarrow 30$$

4.6 Числовое значение результата измерения в стандартной форме:

$$F = (6320 \pm 30) = (6.32 \pm 0.03)\cdot 10^3, \quad \varepsilon_F = 0.49\%.$$

**Таблица 1 – Правила нахождения производных**

| |
|---|
| Если две функции $u = u(x)$ и $\upsilon = \upsilon(x)$ имеют производные, то: |
| 1. **<u>Производная произведения постоянной *C* и функции $u(x)$</u>**<br>$$(Cu)_x' \equiv \frac{d(Cu)}{dx} = Cu_x' = C\frac{du}{dx}$$ |
| 2. **<u>Производная суммы $u(x) \pm \upsilon(x)$</u>**<br>$$(u \pm \upsilon)_x' \equiv \frac{d(u+\upsilon)}{dx} = u_x' + \upsilon_x' = \frac{du}{dx} + \frac{d\upsilon}{dx}$$ |
| 3. **<u>Производная произведения $u(x) \cdot \upsilon(x)$</u>**<br>$$(u\upsilon)_x' \equiv \frac{d(u\upsilon)}{dx} = u_x'\upsilon + u\upsilon_x' \equiv \frac{du}{dx}\upsilon + u\frac{d\upsilon}{dx}$$ |
| 4. **<u>Производная частного $\frac{u(x)}{\upsilon(x)}$</u>**<br>$$\left(\frac{u}{\upsilon}\right)_x' \equiv \frac{d\left(\frac{u}{\upsilon}\right)}{dx} = \frac{u_x'\upsilon - u\upsilon_x'}{\upsilon^2} \equiv \frac{\frac{du}{dx}\upsilon - u\frac{d\upsilon}{dx}}{\upsilon^2}$$ |
| 5. **<u>Производная сложной функции</u>**<br>Если функции $y = f(t)$, а $t = g(x)$ имеют производные, то сложная функция $y = f(g(x))$ имеет производную $y_x' \equiv \frac{dy}{dx} = y_t' \cdot t_x' = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$ |

**Таблица 2 – Таблица производных основных элементарных функций**

| |
|---|
| 1. **Производная постоянной** $$(C)_x' \equiv \frac{dC}{dx} = 0 \quad (C = const)$$ |
| 2. **Производная степенной функции** (n – любое действительное число) $$\left(x^n\right)_x' \equiv \frac{d\left(x^n\right)}{dx} = nx^{n-1}$$ |
| 3. **Производная показательной функции** $$\left(a^x\right)_x' \equiv \frac{d\left(a^x\right)}{dx} = a^x \ln a$$ |
| 4. **Производная экспоненты** $$\left(e^x\right)_x' \equiv \frac{de^x}{dx} = e^x$$ |
| 5. **Производная логарифмической функции** $$(\ln x)_x' \equiv \frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}$$ |
| 6. **Производная синуса** $$(\sin x)_x' \equiv \frac{d \sin x}{dx} = \cos x$$ |
| 7. **Производная косинуса** $$(\cos x)_x' \equiv \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$$ |
| 8. **Производная тангенса** $$(tgx)_x' \equiv \frac{dtgx}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$$ |
| 9. **Производная котангенса** $$(ctgx)_x' \equiv \frac{dctgx}{dx} = \frac{-1}{\sin^2 x}$$ |