Минобрнауки России

Федеральное государственное образовательное учреждение высшего образования
Санкт-Петербургский государственный технологический институт
(технический университет)

Кафедра инженерного проектирования

В.А. Люторович,   Е.Н. Булина

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ.
Готовимся к экзамену
Часть 1 Позиционные задачи

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2017 г.

УДК 331.875

Люторович, В.А. Начертательная геометрия. Часть 1 Позиционные задачи: учебное пособие /В.А. Люторович, Е.Н. Булина. – СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2017 – 62 с.

Рассмотрены основные виды и методы проецирования, применяемые для отображения геометрических объектов на плоскости. Приведены примеры различного положения геометрических элементов относительно плоскостей проекции, а также их взаимного расположения.

Учебное пособие предназначено для студентов 1-5 факультетов очного отделения, изучающих дисциплину «Инженерная графика» по следующим направлениям подготовки бакалавриата: 18.03.01, 18.03.02, 22.03.01, 19.03.01, 15.03.04, 27.03.03, 27.03.04, 20.03.01, 15.03.02, 08.03.01, 09.03.01.

Учебное пособие формирует у студентов следующие компетенции;

- владением основными законами геометрического формирования, построения и взаимного пересечения моделей плоскости и пространства, необходимыми для выполнения и чтения чертежей зданий, сооружений, конструкций, составления конструкторской документации и деталей (ОПК-3)
- способностью проводить предварительное технико-экономическое обоснование проектных решений, разрабатывать проектную и рабочую техническую документацию, оформлять законченные проектно-конструкторские работы, контролировать соответствие разрабатываемых проектов и технической документации заданию, стандартам, техническим условиям и другим нормативным документам (ПК-3)

Учебное пособие может быть полезно студентам заочного отделения.

Рис.100, библиогр. назв. 5.

Рецензенты:

1 ООО «КВИ Интернэшнл» А.Б. Яковлев, инженер-конструктор.

2 Н.А. Незамаев, кандидат технических наук, доцент кафедры машин и аппаратов СПбГТИ(ТУ)

Издание подготовлено в рамках выполнения государственного задания по оказанию образовательных услуг Минобрнауки России.

Утверждено на заседании учебно-методической комиссии механического факультета 25.04.2017 г.

Рекомендовано к изданию РИС СПбГТИ (ТУ)

ВВЕДЕНИЕ

В пособии представлен краткий теоретический материал по некоторым разделам начертательной геометрии. Данное учебное пособие является компиляцией сведений, изложенных в разных учебниках, с последующей адаптацией к дисциплине «Инженерная графика», изучаемой в Санкт-Петербургском государственном технологическом институте (техническом университете).

Первая часть учебного пособия ограничивается рассмотрением вопросов, необходимых для решения позиционных задач, связанных с определением положения геометрических элементов в пространстве и их взаимного расположения. Основное внимание уделено ортогональному проецированию, лежащему в основе создания машиностроительных чертежей.

Каждый раздел содержит большое количество иллюстраций, что способствует пониманию изучаемого материала и последующей подготовке к экзамену.

1 Способы проецирования

Правила, установленные в начертательной геометрии, предусматривают построение изображений с помощью приема, называемого проецированием, в основе этого слова латинское projicere – отбрасывать.

Под проецированием будем понимать отображение на плоскости геометрического объекта, расположенного в пространстве. Так проекцией точки А на плоскости π_0 является точка A_0, полученная при пересечении проецирующего угла ℓ, проходящего через точку А, с плоскостью проекций π_0 (рисунок 1.1)

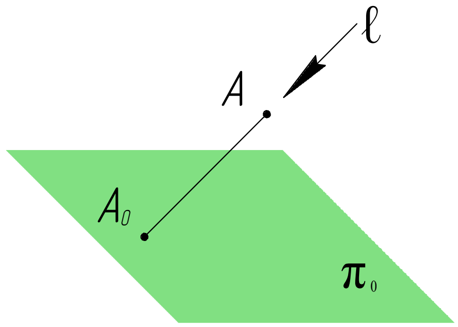


Рисунок 1.1 – Проекция точки на плоскости

Проекция любого геометрического объекта есть множество проекций всех его точек. Положение плоскости проекций и направление проецирующих лучей определяют аппарат или способ проецирования. Рассматривать будем два вида проецирования: центральное и параллельное.

1.1 Центральное проецирование

Центральным называется такое проецирование, при котором все проецирующие лучи исходят из одной точки S – центра проецирования (рисунок 1.2):

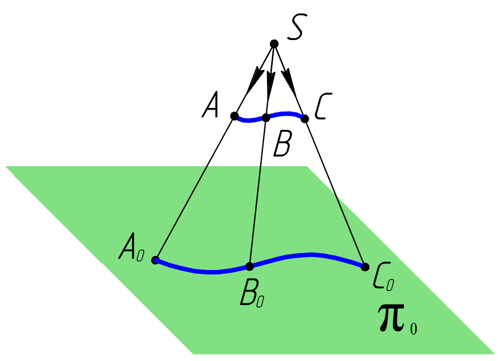


Рисунок 1.2 – Центральная проекция $A_0B_0C_0$ кривой АВС на плоскости π_0

В начертательной геометрии изображенные элементы называются:

(·) S – центр (полюс) проецирования;

π_0 – плоскость проекции;

SA_0, SB_0, SC_0 – проецирующие лучи;

АВС – проецируемый элемент (оригинал);

$A_0B_0C_0$ – центральная проекция оригинала на АВС на плоскости π_0.

Основные свойства центрального проецирования:

- при фиксированном положении плоскости проекций и центра проецирования каждая точка оригинала имеет лишь одну центральную проекцию, так как через две различные точки можно провести только одну прямую;

- любая точка на плоскости проекций является проекцией бесчисленного числа точек, лежащих на проецирующем луче (рисунок 1.3):

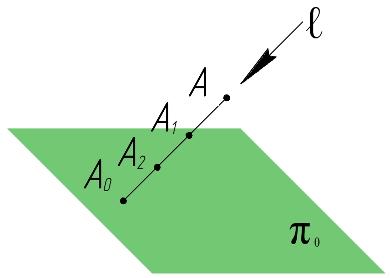


Рисунок 1.3 – Точки на проецирующем луче

- проекция прямой линии, не перпендикулярной плоскости, есть прямая, поскольку все проецирующие лучи, проходящие через точки на заданной прямой, образуют лучевую плоскость α, которая пересекается с плоскостью проекций π_0 по прямой линии (рисунок 1.4):

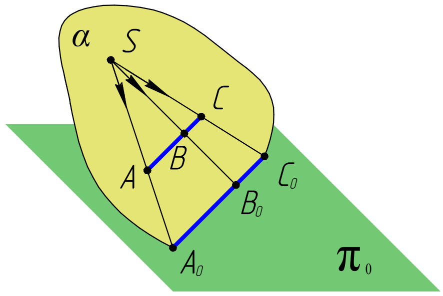


Рисунок 1.4 – Проекция прямой линии

Основной недостаток центрального проецирования заключается в сложности определения истинных размеров оригинала по его проекции. Однако в силу своей высокой наглядности оно широко применяется в архитектуре, изобразительном искусстве, кинематографии и т.д.

1.2 Параллельное проецирование

Параллельным называется такое проецирование, при котором все проецирующие лучи параллельны заданному направлению проецирования F (рисунок 1.5):

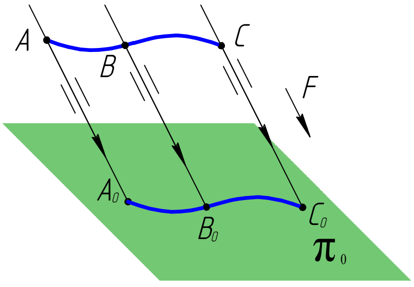


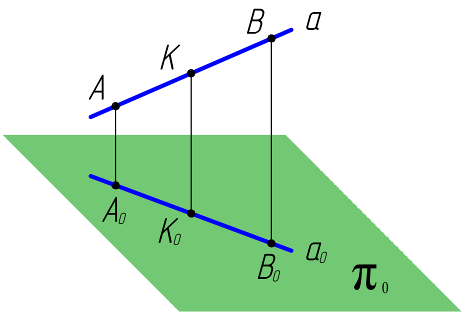
Рисунок 1.5 – Параллельное проецирование кривой ABC

Параллельное проецирование есть частный случай центрального проецирования, при котором центр проецирования бесконечно удален от плоскости проекций.

1.2.1 Инвариантные свойства параллельного проецирования

Параллельное проецирование обладает всеми указанными ранее свойствами центрального проецирования. Кроме того:

- если точка принадлежит прямой, то и проекция этой точки принадлежит проекции прямой (рисунок 1.6):



$$\text{K} \in a \Longrightarrow \text{K}_0 \in a_0$$

Рисунок 1.6 – Проекция точки на прямой

- если точка K делит отрезок AB в отношении m:n, то проекция этой точки делит проекцию отрезка в таком же соотношении:

$$\frac{\text{AK}}{\text{KB}} = \frac{\text{m}}{\text{n}} \Longrightarrow \frac{\text{A}_0\text{K}_0}{\text{K}_0\text{B}_0} = \frac{\text{m}}{\text{n}}$$

- проекция точки пересечения прямых есть точка пересечения проекций этих прямых (рисунок 1.7):

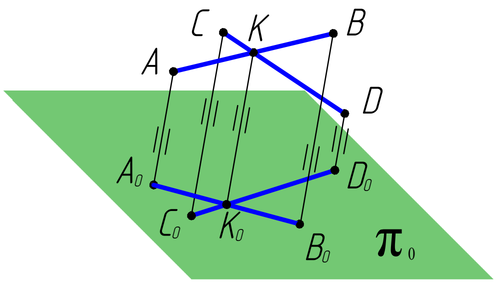
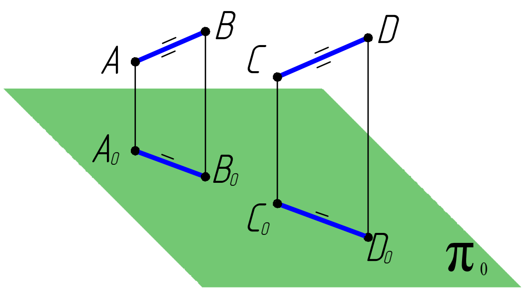


Рисунок 1.7 – Проекция пересекающихся прямых

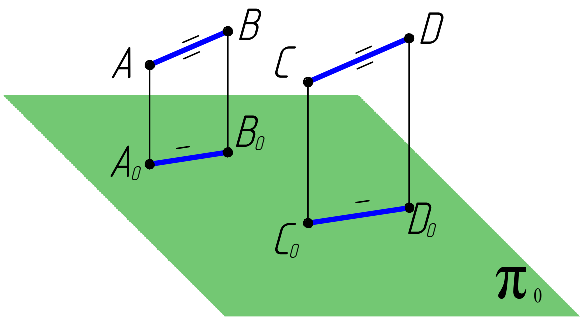
- проекции параллельных прямых также параллельны (рисунок 1.8):



$$\text{AB} \parallel \text{CD} \Longrightarrow \text{A}_0\text{B}_0 \parallel \text{C}_0\text{D}_0$$

Рисунок 1.8 – Проекции параллельных прямых

- отношение отрезков параллельных прямых равно отношению проекций этих отрезков (рисунок 1.9):



$$\frac{AB}{CD} = \frac{A_0B_0}{C_0D_0}$$

Рисунок 1.9 – Проекции отрезков прямых линий

- проекция угла, стороны которого параллельны плоскости проекций, равна самому углу (рисунок 1.10):

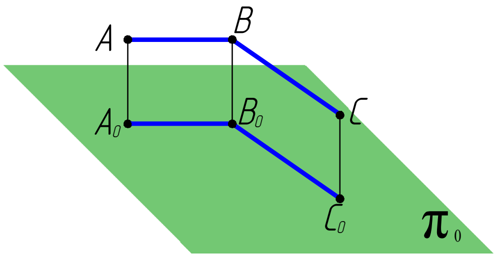


Рисунок 1.10 – Проекция угла на плоскость

Более подробно со свойствами параллельного проецирования можно ознакомиться в литературе, указанной в списке.

В зависимости от направления проецирующих лучей параллельное проецирование делят на *ортогонально*е (прямоугольное) и *косоугольное*.

Проекция называется ортогональной, если проецирующие лучи перпендикулярны плоскости проекций.

Если же проецирующие лучи направлены к плоскости проекций под углом, отличным от прямого, то проекция называется косоугольной.

Метод ортогонального проецирования лежит в основе создания технических чертежей.

2 Система трех плоскостей проекции. Эпюр Монжа

Все геометрические объекты в пространстве могут быть ориентированы относительно декартовой системы координатных осей. Эти оси в свою очередь, образуют систему трех взаимно перпендикулярных плоскостей проекции. При этом одну из плоскостей проекции располагают перед наблюдателем - фронтально (рисунок 2.1):

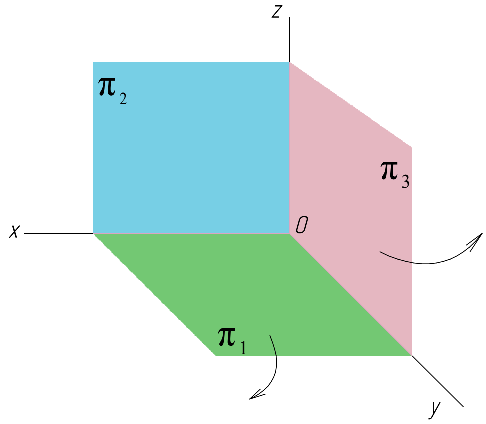


Рисунок 2.1 – Декартова система координатных плоскостей

В начертательной геометрии приняты обозначения:

- плоскость $x0y$ – горизонтальная плоскость проекции π_1
- плоскость $x0z$ – фронтальная плоскость проекции π_2
- плоскость $y0z$– профильная плоскость проекции π_3

При создании технических чертежей все пространственные объекты отображаются на плоскости чертежа (листе бумаги). Поэтому для получения плоской двумерной модели плоскостей проекции горизонтальную плоскость π_1 и профильную π_3 совмещают поворотом вокруг осей 0x и 0z соответственно, с фронтальной плоскостью π_2.

Совмещенное положение плоскостей проекции представлено на рисунке 2.2

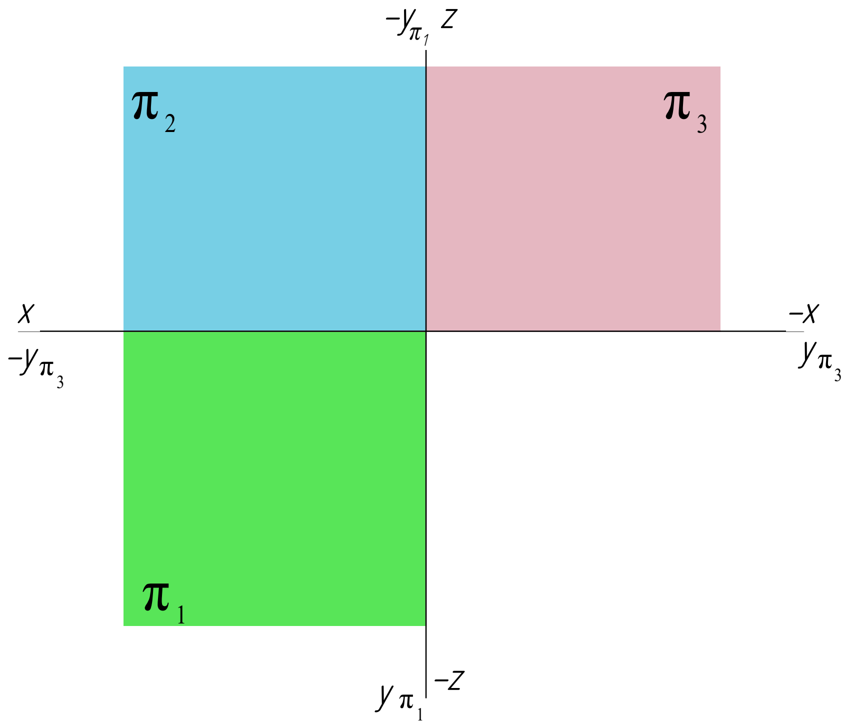


Рисунок 2.2 – Совмещенное положение плоскостей проекции

Следует отметить, что ось 0Y при этом условно «раздваивается» и изображается дважды, относясь к плоскости π_1и плоскости π_3.

Возьмем произвольную точку А и поместим ее в декартову систему координат. Спроецируем ее ортогонально на плоскости π_1, π_2, π_3 (рисунок 2.3):

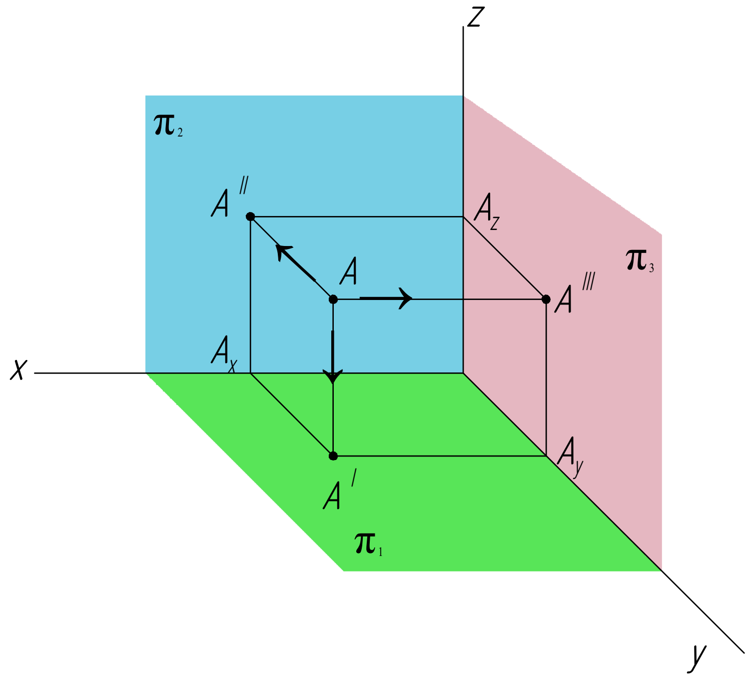


Рисунок 2.3 – Проекции точки на три плоскости координат

Получим соответственно три проекции этой точки:

A' – горизонтальная проекция точки А. Определяется координатами (A_x, A_y);

A'' – фронтальная проекция точки А. Определяется координатами (A_x, A_z);

A''' – профильная проекция точки А. Определяется координатами (A_y, A_z);

Переходя к плоской модели, как была показано выше, получим:

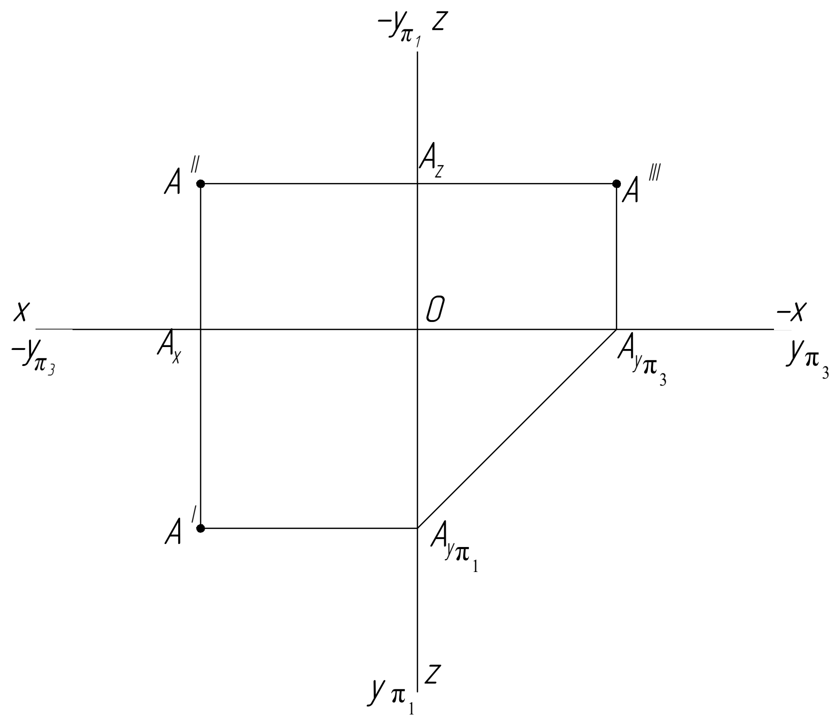


Рисунок 2.4 – Эпюр Монжа

Такое отображение положения точки в ортогональной системе координат получило название **эпюра Монжа**.

Важно отметить, что эпюр Монжа (в дальнейшем просто эпюр) оперирует только проекциями геометрических объектов. Сам объект здесь отображен быть не может, хотя его положение в пространстве уже зафиксировано тремя координатами – x,y,z.

Для точки А значение этих координат определяется положением проекций этой точки (рисунок 2.3.)

$0A_x = A'A_y = A''A_z = X_A$–абсцисса точки А;

$0A_y = A'A_x = A'''A_z = Y_A$ – ордината точки А;

$0A_z = A''A_x = A'''A_y = Z_A$ – аппликата точки А

Из рисунка 2.4 видно, что в ортогональной системе координат горизонтальная и фронтальная проекции точки лежат на одном перпендикуляре к оси 0X (в определенных случаях совпадают), а фронтальная и профильная проекции – на одном перпендикуляре к 0Z (или совпадают), т.е. $A'A''\perp 0X$, $A''A'''\perp 0Z$. Это важно для контроля правильности решения задач.

Для определения положения точки в пространстве достаточно знать положение двух любых ее проекций, т.к. при этом известны все три ее координаты, следовательно, можно легко достроить недостающую третью проекцию. Напомним, что положение проекций определяется следующими координатами $A'(A_x,A_y)$, $A''(A_x,A_z)$, $A'''(A_y,A_z)$.

В общем случае все пространство в начертательной геометрии плоскостями π_1, π_2, π_3 делится на восемь частей - октантов или координатных углов.

Принята следующая нумерация октантов (рисунок 2.5):

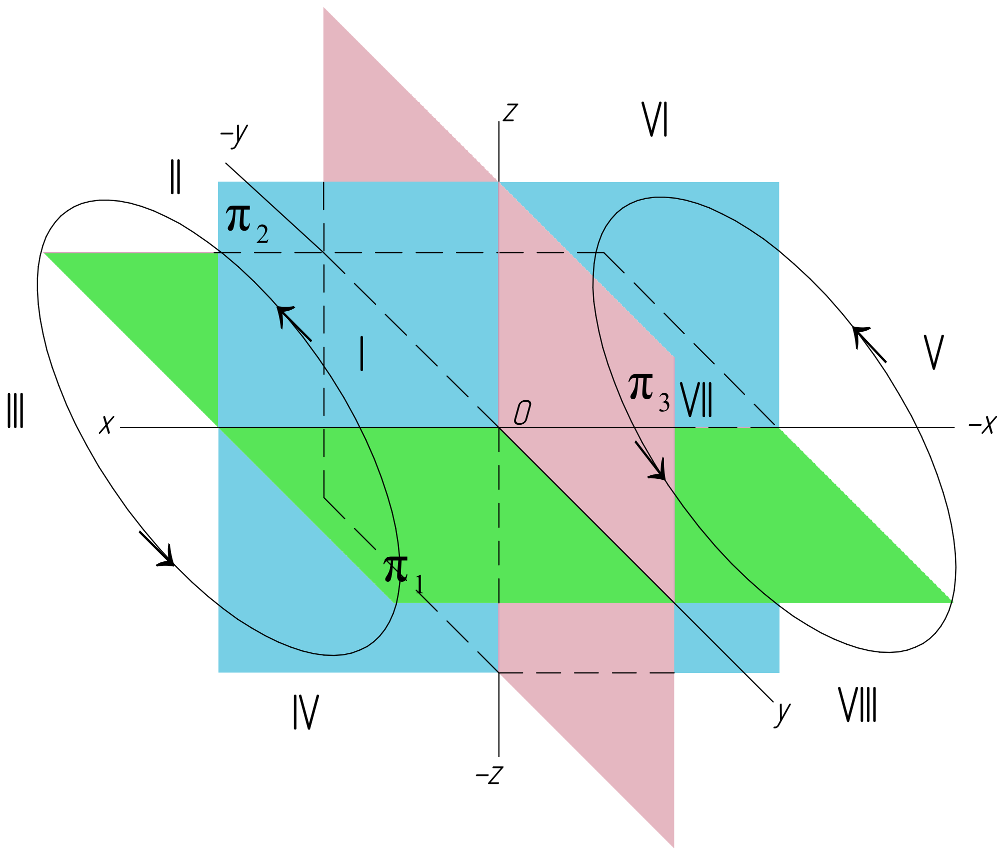


Рисунок 2.5 – Октанты

Знаки координат точек, расположенных в различных октантах

	x	y	z	
I окт.	+	+	+	
II окт.	+	-	+	+x
III окт.	+	-	-	
IV окт.	+	+	-	
V окт.	-	+	+	
VI окт.	-	-	+	-x
VII окт.	-	-	-	
VIII окт.	-	+	-	

С учетом знаков относительно начала координат ортогональная система выглядит так (рисунок 2.6):

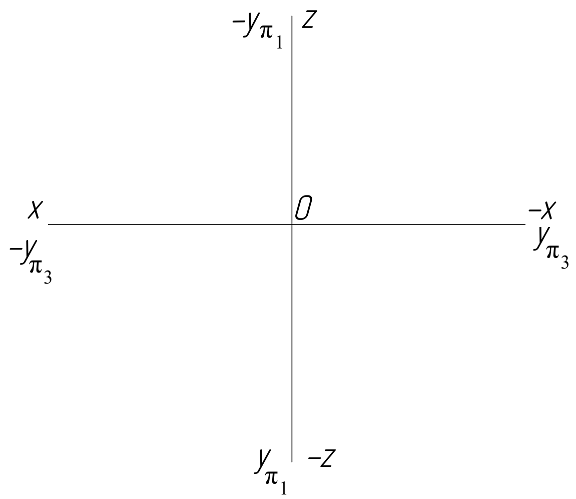


Рисунок 2.6 – Ортогональная система координат

3 Положение точки в пространстве

Проецируемая точка может занимать произвольное положение в пространстве: располагаться в любом из октантов, находиться на плоскости или оси координат. Поэтому при построении ее проекций следует учитывать не только численные значения координат, но и их знаки. Принято различать **общие** и **частные** случаи положения точки.

Точкой **общего** положения считают точку, у которой все три координаты отличны от нуля. При этом знаки этих координат определяют принадлежность точки тому или иному октанту.

Точками **частного** положения считаются точки, у которых хотя бы одна координата равна нулю. Нетрудно представить, что если одна координата равна нулю, то точка находится на плоскости проекций, определяемой двумя другими координатами. Если две – то на оси, а если все три – то в начале координат.

Рассмотрим несколько примеров различного положения точки в пространстве.

Пример 1. Построить проекции точки A(40; -30; 40). Определить принадлежность октанту.

В начертательной геометрии порядок задания координат принят следующим – A(A_x; A_y; A_z).

Построение проекций точки можно начать сразу в ортогональной системе координат. Изобразим оси координат x(-x), y(-y), z(-z). Затем на этих осях отложим численные значения координат с учетом их знаков. Учитывая принятые обозначения A'(A_x,A_y), A'' (A_x,A_z), A'''(A_y,A_z) построим проекции точки A (рисунок 3.1):

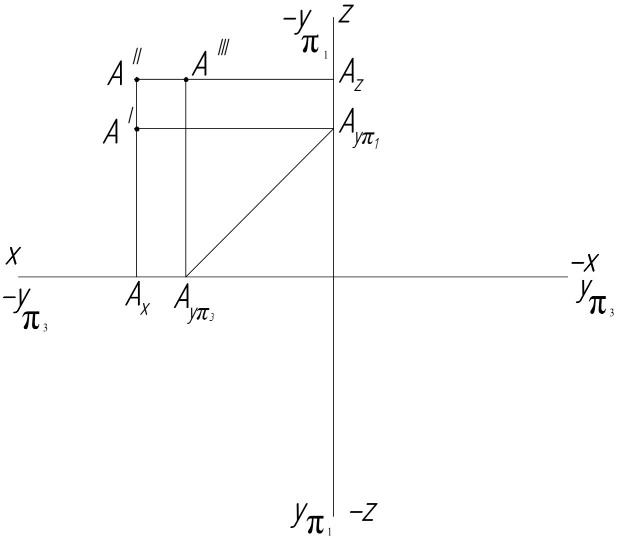
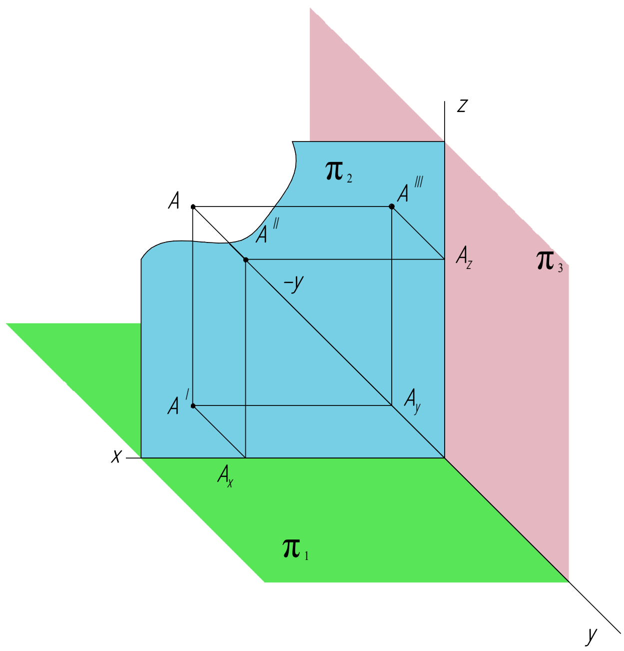


Рисунок 3.1 – Эпюр точки A

Уже на этом этапе, анализируя знаки координат (+, -, +), можно утверждать, что точка A находится во втором октанте. Проверим это, построив ее в аксонометрических осях. Для этого строим горизонтальную A', фронтальную A'' и профильную A''' проекции в точках пересечения прямых, проведенных из A_x, A_y, A_z параллельно соответствующим осям координат (рисунок 3.2):



$(\cdot)A \in \text{II}$ октанту

Рисунок 3.2 – Аксонометрическое изображение точки A

Изображение точки А получим в пересечении перпендикуляров, восстановленных из A', A'' и A''' к плоскостям проекции. Из рисунка 3.2 наглядно видно, что действительно точка находится во втором октанте.

Рассмотрим случай, когда одна из координат равна нулю.

Пример 2. Построить проекции точки B (0; 40; -30) и определить ее принадлежность октантам.

Выполним построение проекций точки B в ортогональной системе координат аналогично тому, как это делалось в предыдущем примере. При этом получим (рисунок 3.3):

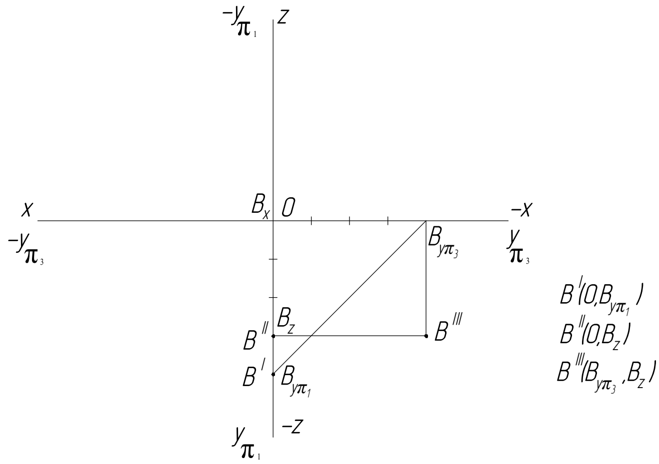
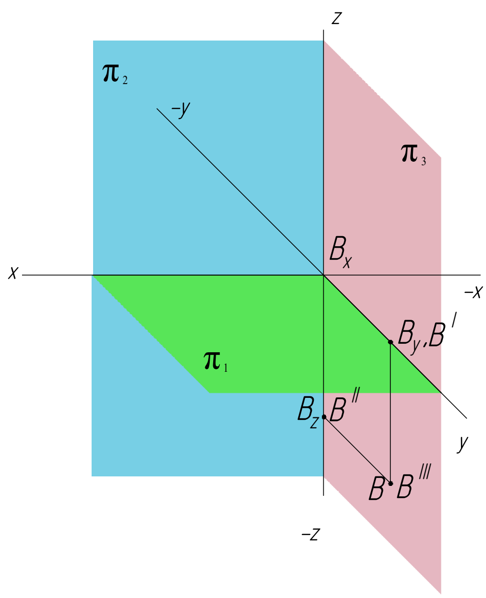


Рисунок 3.3 – Проекции точки, находящейся в плоскости проекций

Нетрудно заметить, что если B_x=0, то $B''\equiv B_z$ и $B'\equiv B_{y\pi 1}$. Профильная проекция построена с учетом того, что $B'''(B_{y\pi 3},B_z)$.

Проведя построения в аксонометрических осях (рисунок 3.4), видно, что точка B расположена в профильной плоскости проекций π_3 между Ⅳ и Ⅷ октантами.

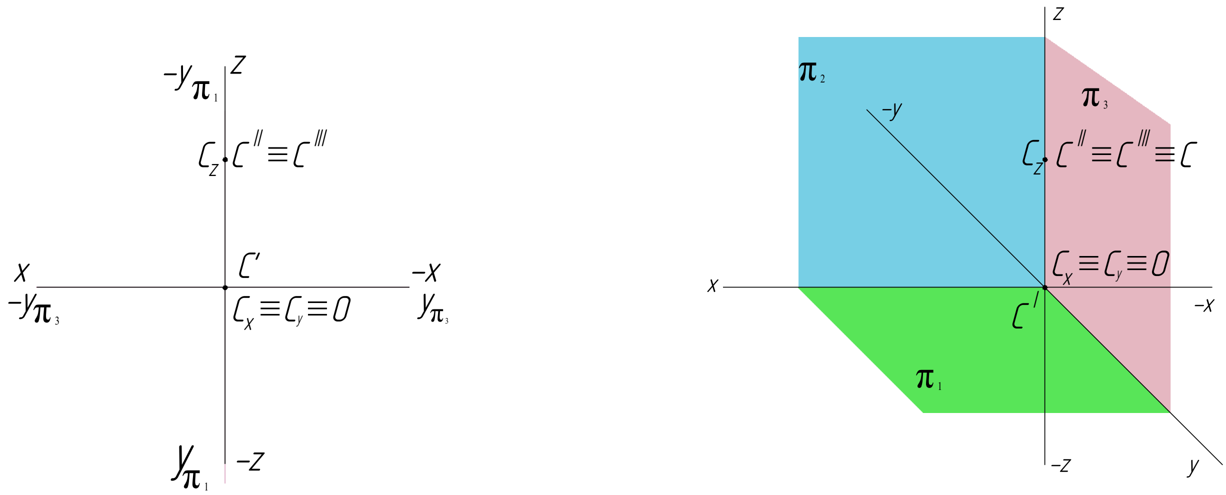


$(\cdot)B \in$ пл – ти π_3 между Ⅳ и Ⅷ октантами

Рисунок 3.4 –Точка в плоскости проекций

Таким образом, если точка лежит в плоскости координат, то ее проекция на данную плоскость совпадает с самой точкой, а две другие проекции расположены на осях координат.

Аналогичным образом можно доказать, что если точка лежит на оси координат, то две ее проекции совпадают с самой точкой, а третья находится в начале координат (рисунок 3.5). Принято считать, что сама точка при этом принадлежит одновременно четырем октантам, расположенным вокруг этой оси (с учетом знака координат).

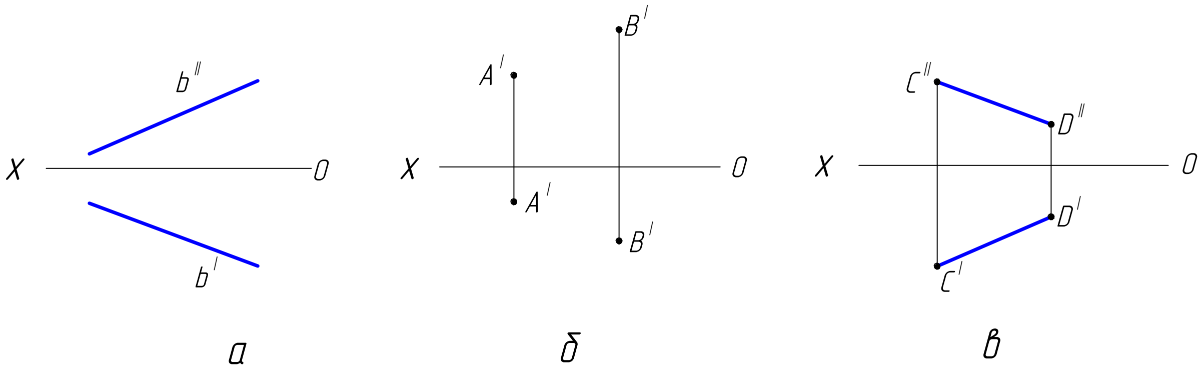


(·)C ∈ оси 0z лежит между I, II, V, VI октантами

Рисунок 3.5 – Точка на оси координат

4 Прямая линия

В ортогональной системе координат прямая линия может быть задана проекциями прямой b(b',b'') (рисунок 4.1 а), проекциями двух нетождественных точек, принадлежащих ей A(A', A'') и B(B', B'') (рисунок 4.1 б), проекциями отрезка прямой CD(C'D', C''D'') (рисунок 4.1 в).



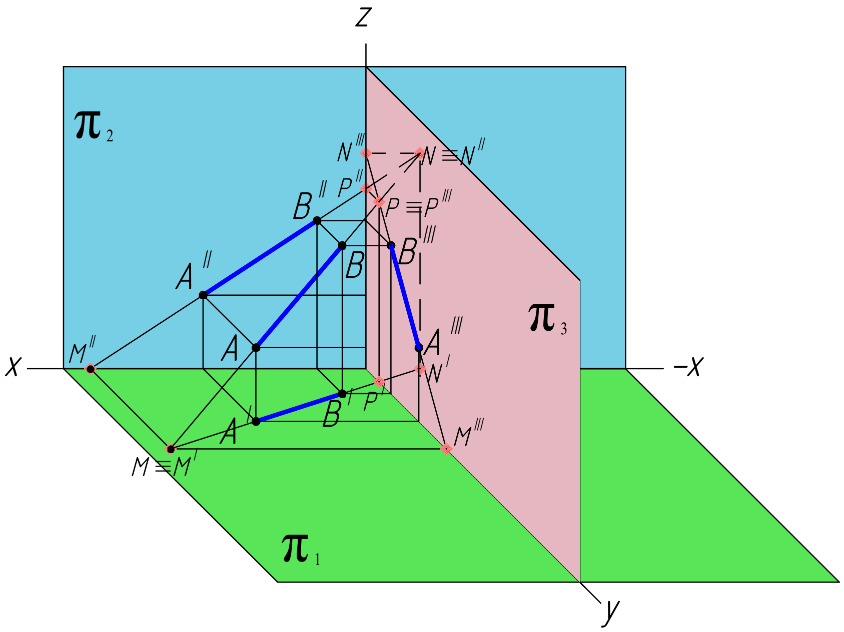
а - проекциями прямой б - двумя точками в - проекциями отрезка

Рисунок 4.1 – Способы задания прямой

Принято различать прямые **общего** и **частного** положений.

4.1 Прямая общего положения. Следы прямой линии

Прямой **общего** положения называют прямую, пересекающую все три плоскости проекций. Следовательно, она наклонена к этим плоскостям на угол отличный от 0 и 90°. На рисунке 4.2 изображен отрезок АВ, являющейся частью прямой общего положения.



$$(\cdot)M \in \pi_1;\ \ (\cdot)N \in \pi_2;\ \ (\cdot)P \in \pi_3$$

Рисунок 4.2 – Прямая общего положения

Точку пересечения (встречи) прямой с плоскостью проекции называют **следом** прямой на данной плоскости. Таким образом, прямая общего положения имеет три следа. В зависимости от того, с какой плоскостью проекций происходит «встреча» прямой, следы обозначают и называют:

$M -$ горизонтальный след прямой на плоскости π_1;

$N -$ фронтальный след прямой на плоскости π_2;

$P -$ профильный след прямой на плоскости π_3.

В дальнейшем, для удобства изложения материала в данном разделе, прямую заданную отрезком, например АВ, также будем называть прямой АВ. Из рисунка 4.2 видно, что прямая АВ пересекает плоскость π_1 в точке М. Это горизонтальный след прямой АВ на данной плоскости. Ранее, при рассмотрении инвариантных свойств проецирования, было установлено, что если точка принадлежит прямой, то ее проекции находятся на одноименных проекциях этой прямой (М' є А' В',М'' є А''В'', М''' є А'''В'''). Кроме того, поскольку точка М находится на плоскости π_1, то ее горизонтальная проекция будет совпадать с самой точкой, т.е. М'≡М.

Изображение фронтальной проекции M'' горизонтального следа найдем на оси 0X, проведя через M' прямую, параллельную оси 0у. Профильную проекцию M''' горизонтального следа получаем на пересечении с осью 0у прямой, проведенной через M' параллельно оси 0х.

Аналогично находятся проекции фронтального N и профильного P следов данной прямой.

Изобразим проекции прямой и ее следов на эпюре (рисунок 4.3):

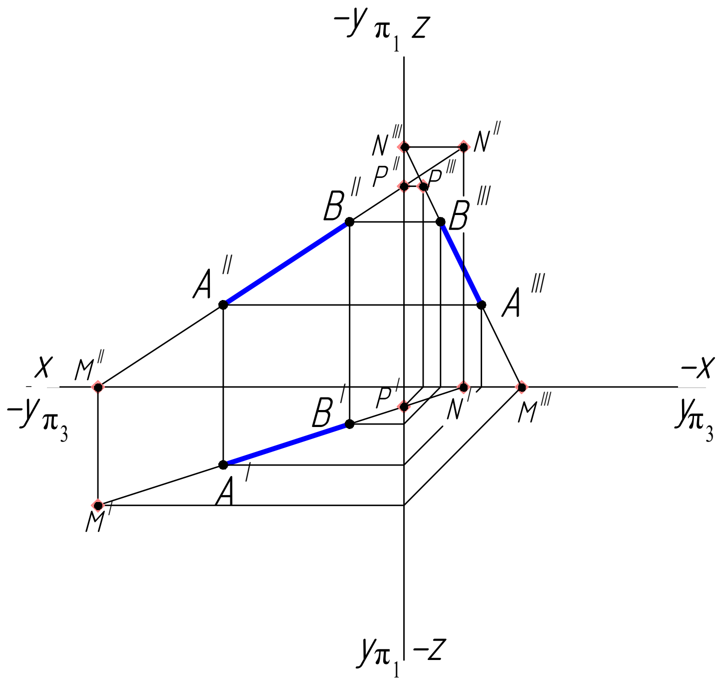


Рисунок 4.3 – Проекции прямой и ее следов в ортогональной системе координат

Проводя построение следов прямой общего положения в ортогональной системе координат, необходимо запомнить следующее:

- горизонтальная проекция A' B', пересекая оси 0х и 0у, дает N' и P' соответственно;
- фронтальная проекция A''B'', пересекая оси 0х и 0z, дает M'' и P'' соответственно;
- профильная проекция A''' B''', пересекая оси 0у и 0z, дает M''' и N''' соответственно

$$A'B' \to N'(0X), P'(0Y)$$
$$A''B'' \to M''(0X), P''(0Z)$$
$$A'''B''' \to M'''(0Y), N'''(0Z)$$

По двум имеющимся проекциям каждого следа не составит труда построить их третьи проекции.

Построения выполнены, верно, если в результате M' є A' B', N'' є A''B'', P''' є A'''B'''.

4.2 Определение истинной длины отрезка прямой линии

Важно отметить, что проекции отрезка прямой общего положения не равны истинной длине самого отрезка. Истинную длину отрезка по его проекциям можно определить либо методом трапеции, либо методом треугольника.

4.2.1 Метод трапеции

На рисунке 4.4 изображены в аксонометрической проекции отрезок AB, расположенный в первом октанте и его горизонтальная проекция A'B'. С учетом линий проекционной связи эти элементы образуют прямоугольную трапецию ABB'A' .

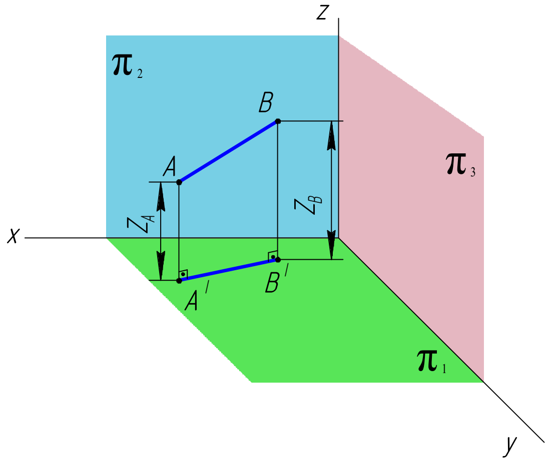


Рисунок 4.4 – Определение длины отрезка методом трапеции по его горизонтальной проекции

Удаленность точек A и B от плоскости π_1определяется как Z_A и Z_B соответственно. Таким образом, для определения длины отрезка AB достаточно из концов проекции A'B' восстановить перпендикуляры и на них отложить значения координаты Z точек A и B.

Аналогично рассуждая, можно показать, что длина отрезка AB может быть найдена при помощи прямоугольной трапеции, построенной на фронтальной проекции A"B" этого отрезка (рисунок 4.5). В этом случае удаленность точек A и B от плоскости π_2 определяется координатой Y:

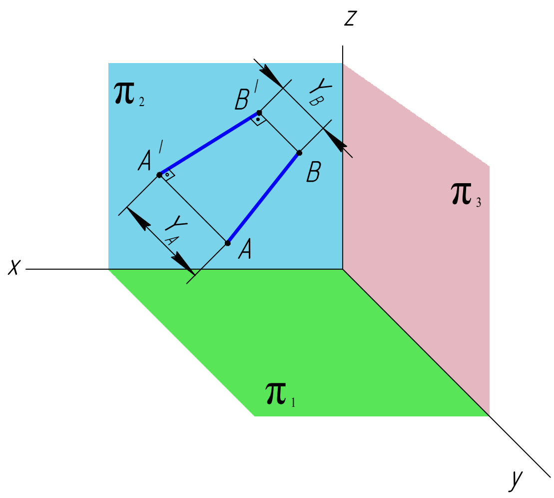


Рисунок 4.5 – Определение длины отрезка по его фронтальной проекции

Подобные построения можно было бы выполнить и для профильной проекции отрезка.

Анализируя эти рисунки, нетрудно заметить, что на перпендикулярах восстановленных из концов соответствующей проекции отрезка, откладывается значение «недостающей» координаты, т.е. той, которая не участвует в построении данной проекции. Таким образом, при определении истинной длины отрезка следует помнить:

$$A'B' \to Z_A \text{и } Z_B$$
$$A''B'' \to Y_A \text{и } Y_B$$
$$A'''B''' \to X_A \text{и } X_B$$

На рисунке 4.6 показано определение истинной длины отрезка A^*B^* по его проекциям, построенным в ортогональной системе координат.

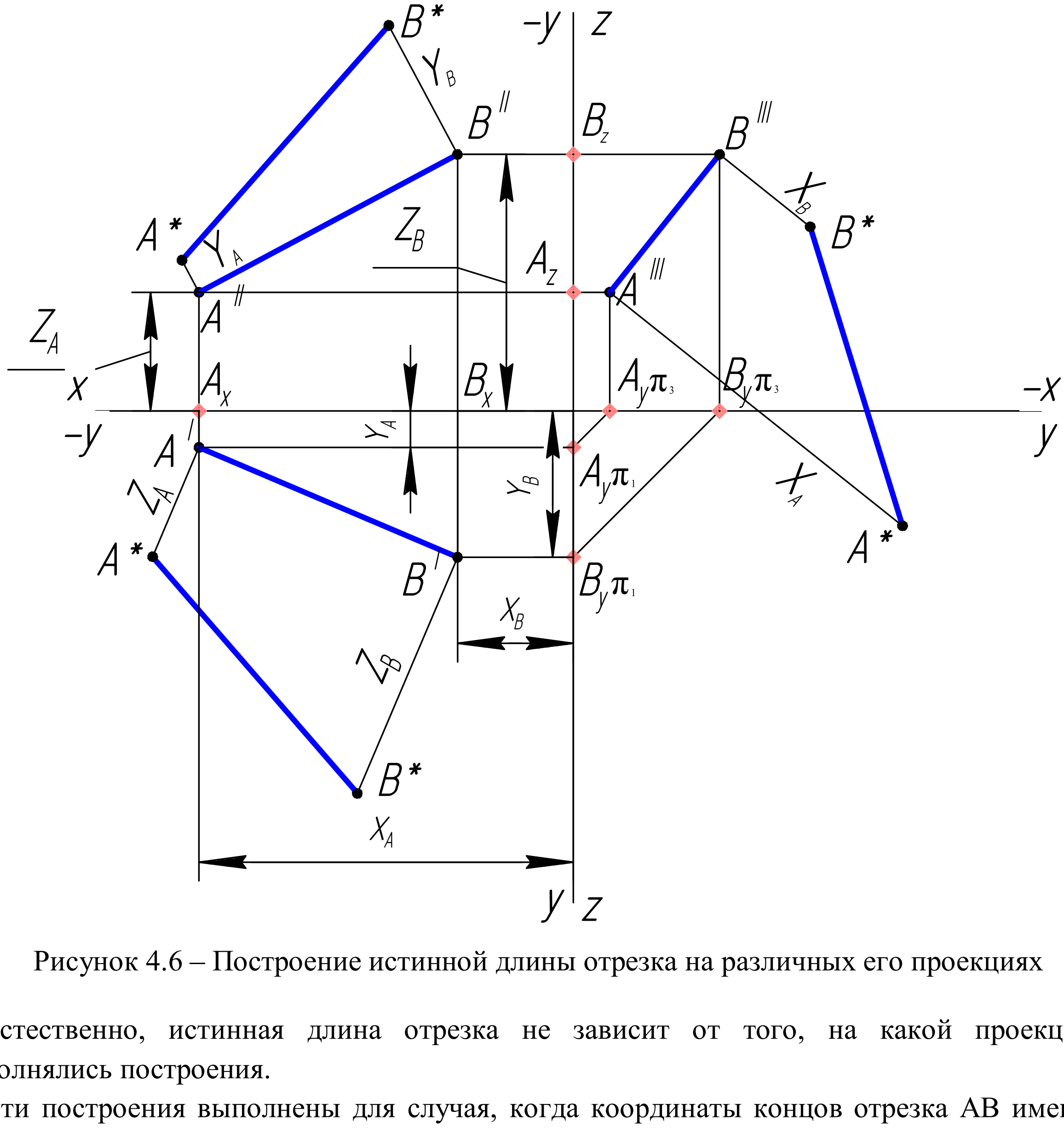
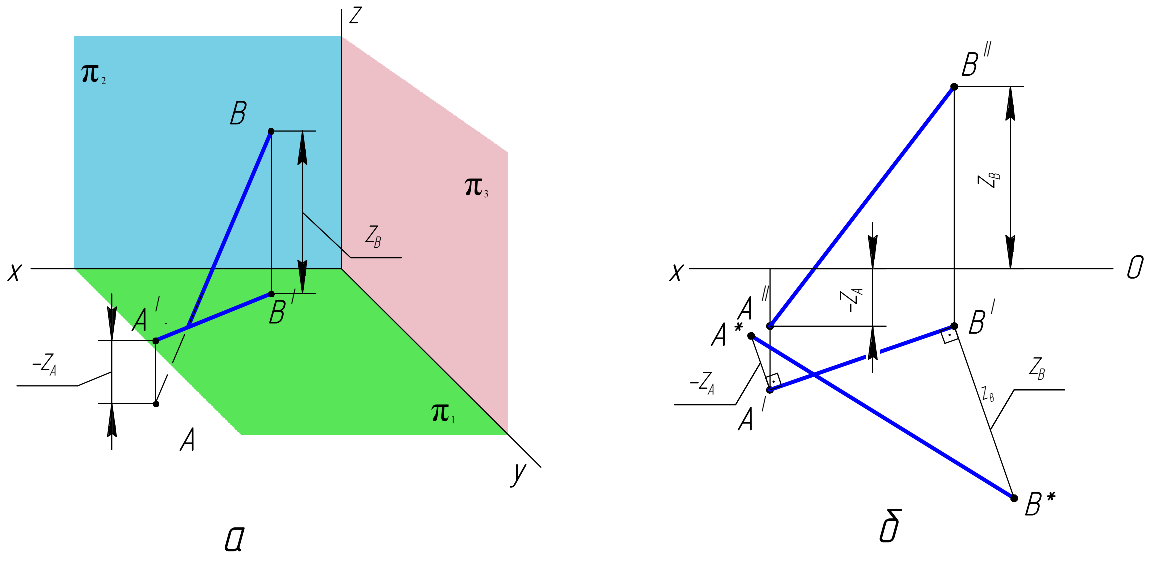


Рисунок 4.6 – Построение истинной длины отрезка на различных его проекциях

Естественно, истинная длина отрезка не зависит от того, на какой проекции выполнялись построения.

Эти построения выполнены для случая, когда координаты концов отрезка AB имеют одинаковые знаки, т.е. «однознаковы». Рассмотрим случай, когда точки A и B отрезка имеют разные знаки координаты Z – точка A находится под плоскостью π_1 в четвертом октанте, а точка B – в первом октанте (рисунок 4.7а):



а – в аксонометрических осях   б – на эпюре

Рисунок 4.7 – Отрезок с разными знаками координаты Z

В этом случае при определении истинной длины A^*B^*, в связи с разностью знаков координаты Z точек А и В, перпендикуляры восстанавливаются по разные стороны от горизонтальной проекции A'B'.

4.2.2 Метод треугольника

Выполним еще раз построения, аналогично представленным на рисунке 4.4 и проведем $AB_1 \| A'B'$ (рисунок 4.8). Получим прямоугольный треугольник BAB_1. Искомая длина отрезка АВ равна длине гипотенузы треугольника, в котором один катет равен горизонтальной проекции A'B' (AB_1=A'B'), а второй катет есть алгебраическая разность координаты Z точек А и В, т.е. $\Delta Z = Z_B - Z_A$.

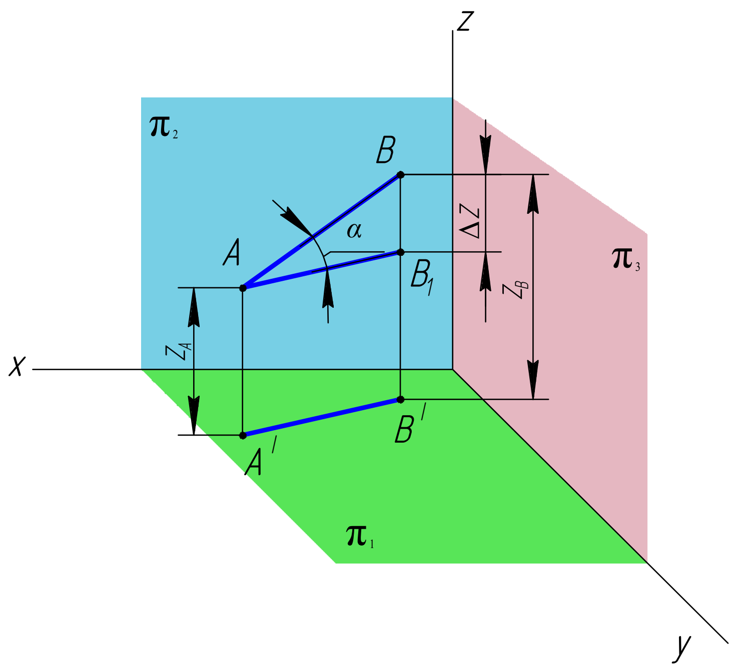


Рисунок 4.8 – Определение длины отрезка методом треугольника

Алгебраическая разность подразумевает учет не только численного значения, но и знака откладываемой координаты. Так, например, при определении длины отрезка, представленного на рисунке 4.7 способом треугольника, построения на эпюре выглядят так:

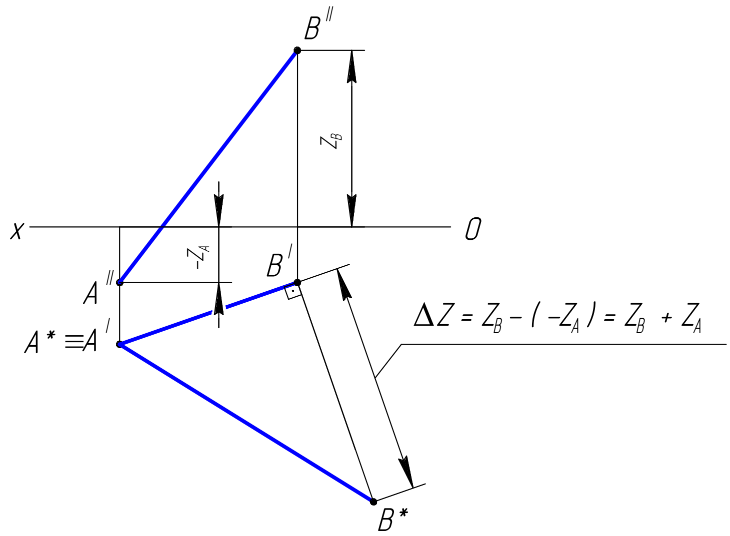


Рисунок 4.9 – Построение истинной длины отрезка методом треугольника с учетом алгебраической разности координат его концов

Известно, что угол наклона прямой к плоскости представляет собой угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость. Из рисунка 4.8. видно, что $\angle BAB_1$ $(\angle\alpha)$ определяет угол наклона отрезка AB к горизонтальной плоскости проекций π_1.

Аналогично рассуждая, можно получить углы наклона прямой и к плоскостям π_2 $(\angle\beta)$ и π_3 $(\angle\gamma)$.

На рисунке 4.10 представлен пример определения длины отрезка AB по трем его проекциям методом треугольника и показаны углы наклона этого отрезка к плоскостям проекции:

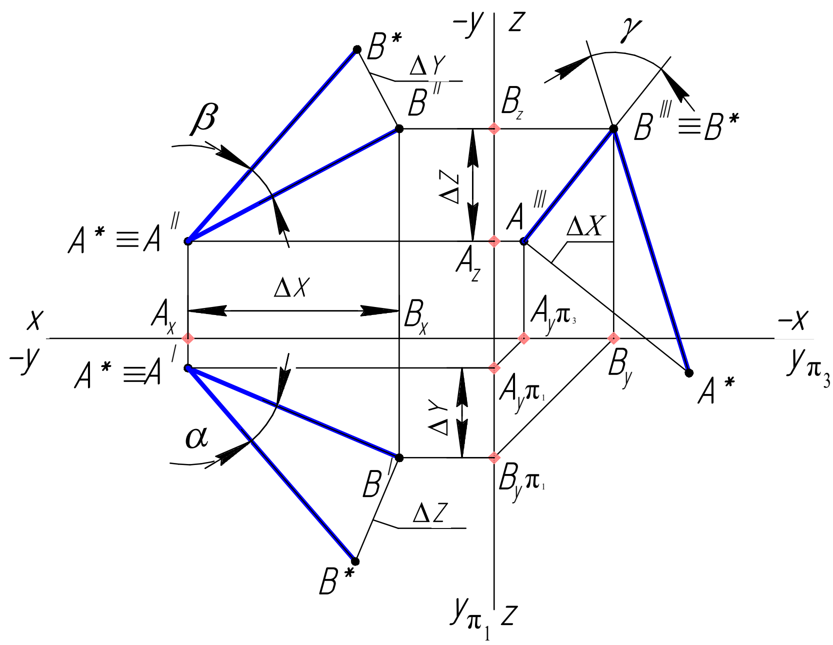


Рисунок 4.10 – Истинная длина отрезка и углы его наклона к плоскостям проекции

Важно отметить, что истинная длина отрезка не зависит ни от метода ее определения, ни от того, на какой проекции проводились построения.

4.3 Частные случаи положения прямой в пространстве

Наибольший интерес представляют частные случаи положения прямых, т.е. когда они ориентированы определенным образом относительно плоскостей проекции. Будем рассматривать прямые параллельные какой- либо плоскости проекции, перпендикулярные ей, лежащие в плоскости проекций.

4.3.1 Прямы, параллельные плоскостям проекции

Прямые, параллельные какой-либо плоскости проекции, называют линиями уровнями.

Ели прямая параллельна горизонтальной плоскости проекций π_1 (рисунок 4.11), то ее называют **горизонтальной прямой** или **горизонталью** и обозначают h.

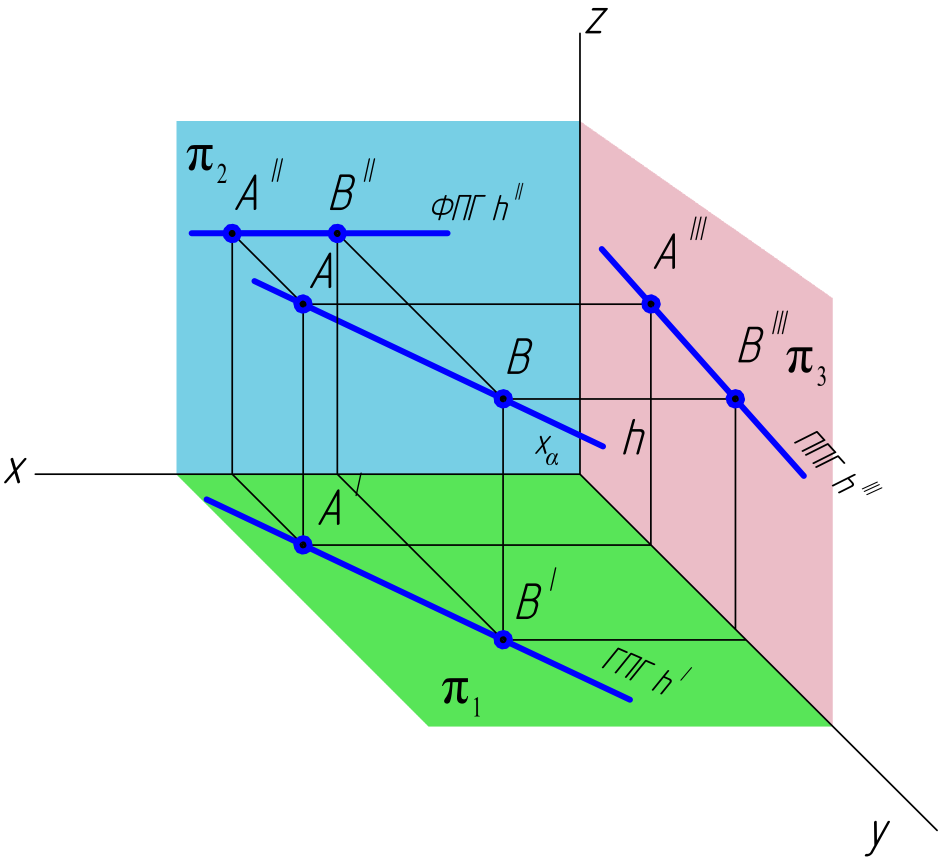


Рисунок 4.11 – Горизонтальная прямая

Все точки горизонтали удалены на одинаковое расстояние от плоскости π_1. Поэтому фронтальная проекция горизонтали (ФПГ) h'' всегда параллельна оси 0X, а профильная h'''– оси 0у. Справедливо и обратное утверждение: любая прямая, фронтальная проекция которой параллельна оси 0х, параллельна плоскости π_1, т.е. является горизонталью. Следовательно, она проецируется на эту плоскость без искажения, т.е. горизонтальная проекция горизонтали (ГПГ) является истинной величиной. На эпюре это выглядит так:

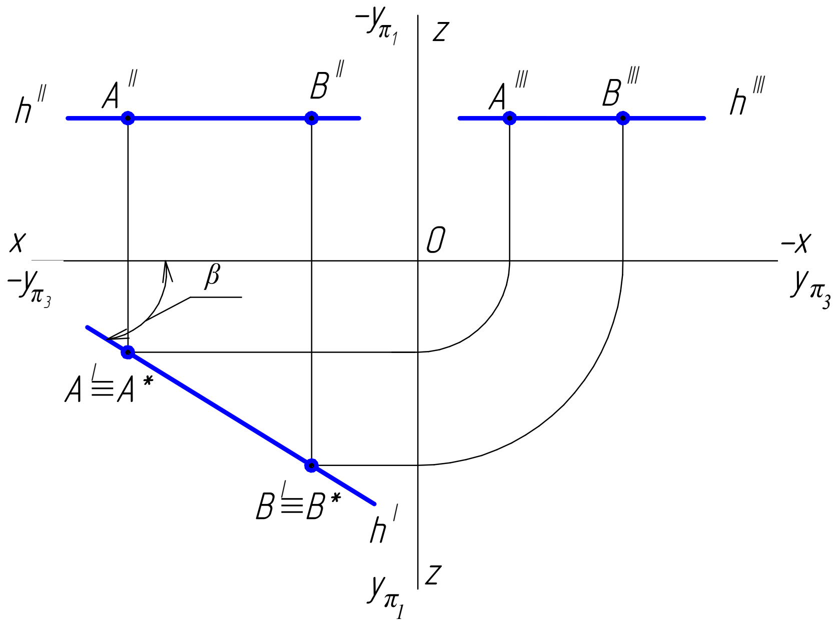


Рисунок 4.12 – Эпюр горизонтали

Важно запомнить, что для **горизонтали всегда** $h''_{AB} \parallel 0x;\ h'_{AB} \equiv A^*B^*$

Аналогично, прямая параллельная фронтальной плоскости π_2 (рисунок 4.13), называется **фронтальной прямой** или **фронталью** и обозначается f:

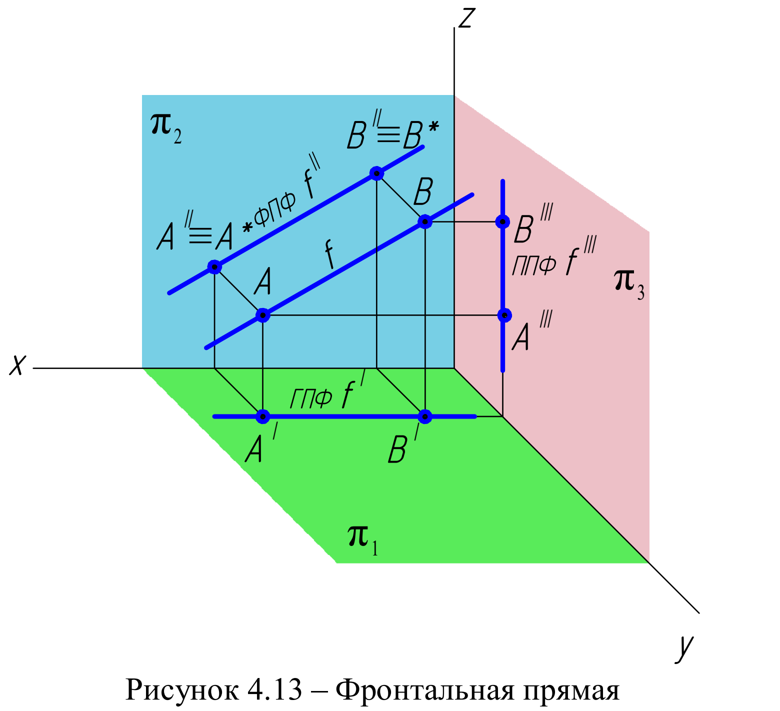


Рисунок 4.13 – Фронтальная прямая

Все точки фронтали равноудалены от фронтальной плоскости π_2. Поэтому горизонтальная проекция фронтали f '(ГПФ) всегда параллельна оси 0x, профильная f ''' – оси 0z. Следовательно, любая прямая, имеющая горизонтальную проекцию параллельную оси 0x, будет параллельна плоскости π_2. Значит фронтальная проекция (ФПФ) отрезка такой прямой является его истинной величиной (рисунок 4.14):

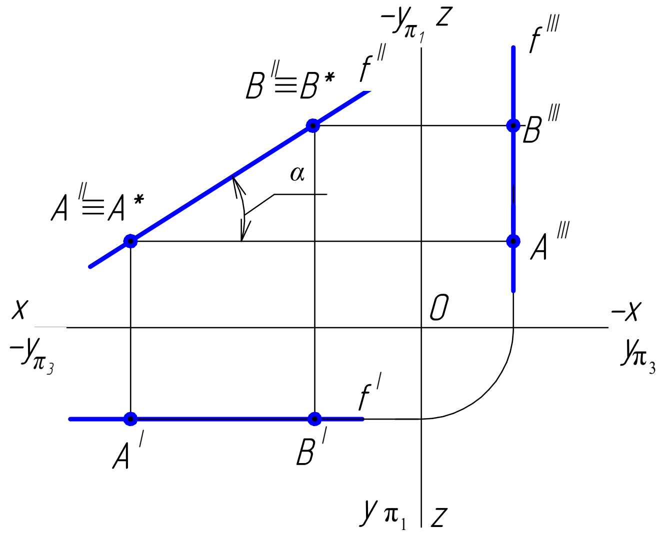


Рисунок 4.14 – Эпюр фронтали

Важно запомнить, что для **фронтали всегда** $f'_{AB} \parallel 0x;\ f''_{AB} \equiv A^*B^*$

Анализируя положение профильной прямой (рисунок 4.15), с учетом равной удаленности всех ее точек относительно плоскости π_3 можно утверждать, что фронтальная проекция такой прямой параллельна оси 0z, горизонтальная проекция – оси 0y, а ее отрезок проецируется на плоскость π_3 без искажения.

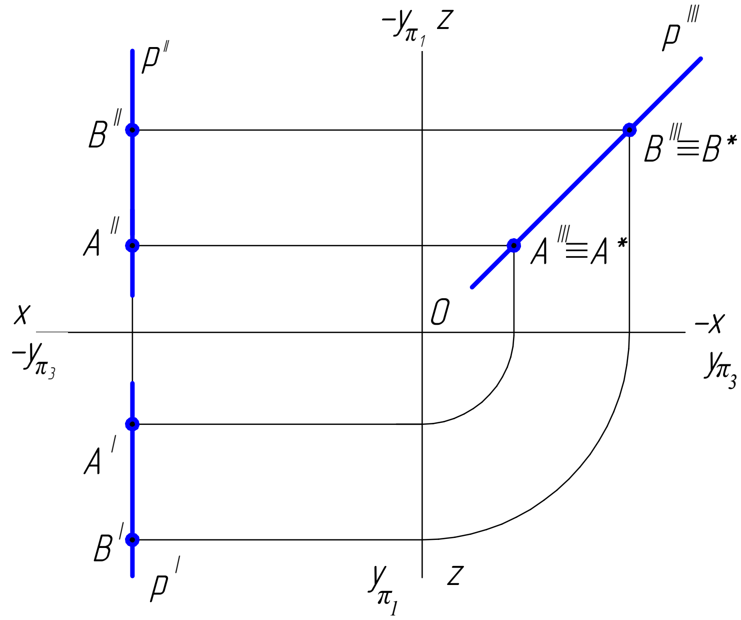


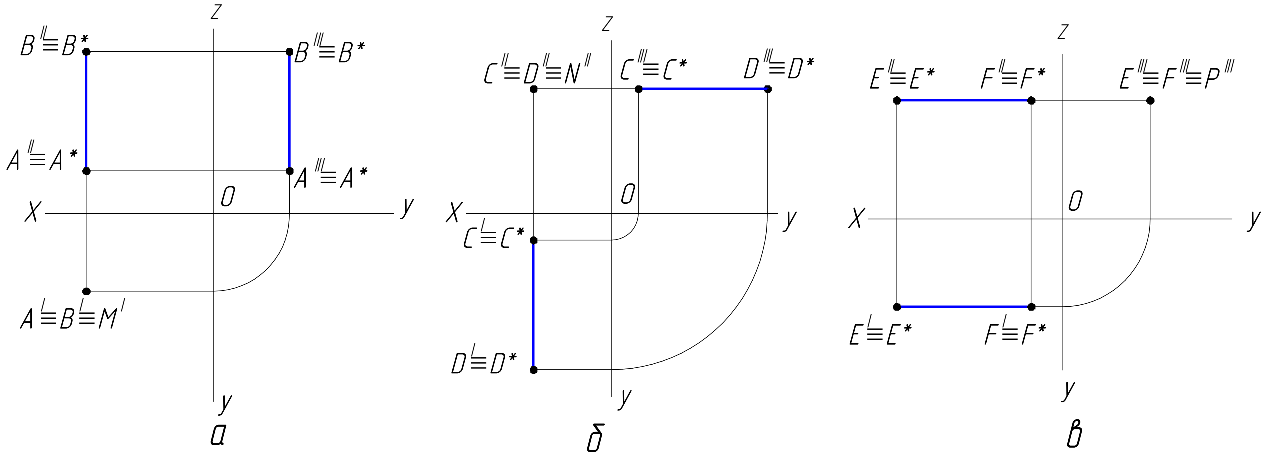
Рисунок 4.15 – Эпюр профильной прямой

Следует отметить, что прямая, параллельная какой-либо плоскости проекций, имеет лишь два следа на двух других плоскостях и, соответственно, шесть проекций этих следов. Так если прямая параллельна плоскости π_1, то она имеет лишь фронтальный след N(N', N'', N''') и профильный след P(P', P'', P''').

Аналогично фронтальная прямая имеет только горизонтальный M(M', M'', M''') и профильный P(P', P'', P''') следы, а у профильной прямой будут только горизонтальный M(M', M'', M''') и фронтальный N(N', N'', N''') следы.

4.3.2 Прямые, перпендикулярные плоскостям проекции

Такие прямые называются проецирующими. На рисунке 4.16 показаны прямые, перпендикулярные соответственно горизонтальной π_1 (рисунок 4.16 а), фронтальной π_2 (рисунок 4.16 б) и профильной π_3 (рисунок 4.16 в) плоскостями проекции.



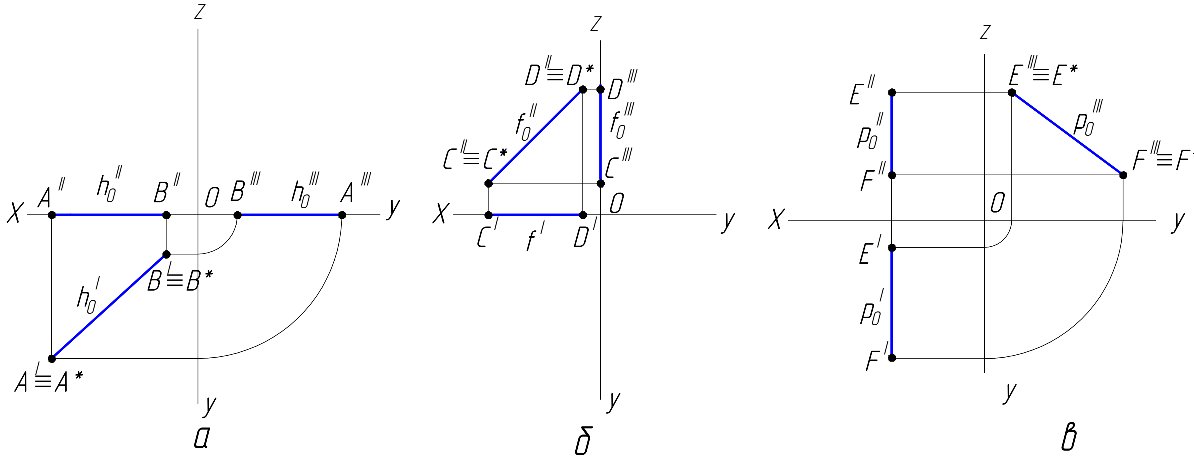
а – горизонтальной плоскости проекций; б – фронтальной плоскости проекции; в – профильной плоскости проекций

Рисунок 4.16 – Прямые, перпендикулярные

В общем случае, прямая, перпендикулярная плоскости координат, имеет лишь один след, совпадающий с точкой, в которую проецируется прямая на эту плоскость. На две другие плоскости отрезок такой прямой проецируется в истинную величину.

4.3.3 Прямые, принадлежащие плоскостям проекции

Такие прямые являются частным случаем линий уровня. Ниже показаны прямые, принадлежащие горизонтальной плоскости проекции (частный случай горизонтальной прямой при Z=0, рисунок 4.17 а), фронтальной плоскости (частный случай фронтали при Y=0, рисунок 4.17 б) и профильной плоскости проекций (частный случай профильной прямой при X=0, рисунок 4.17 в).



а - в горизонтальной плоскости проекций; б - во фронтальной плоскости проекций
в - в профильной плоскости проекций

Рисунок 4.17 – Прямые, лежащие в плоскости проекций

Прямая, лежащая в плоскости проекций и не перпендикулярная ни одной другой плоскости, имеет два следа. Ее проекция на эту плоскость совпадает с самой прямой и является истинной величиной, а две другие проекции находятся на осях координат.

Ели прямая расположена на оси координат, то две ее проекции совпадают с самой прямой, а на плоскость, перпендикулярную этой оси, прямая проецируется в виде точки в начале координат (рисунок 4.18).

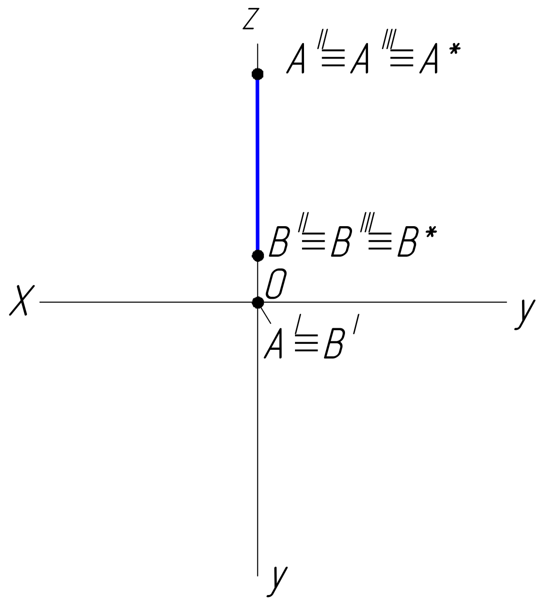


Рисунок 4.18 – Прямая на оси координат

4.4 Взаимное положение прямых линий

Возможны три случая относительного положения прямых в пространстве:

- прямые пересекаются;
- прямые параллельны;
- прямые скрещиваются.

4.4.1 Пересекающиеся прямые линии

Пересекающимися называют прямые, имеющие общую точку и лежащие в одной плоскости (рисунок 4.19):

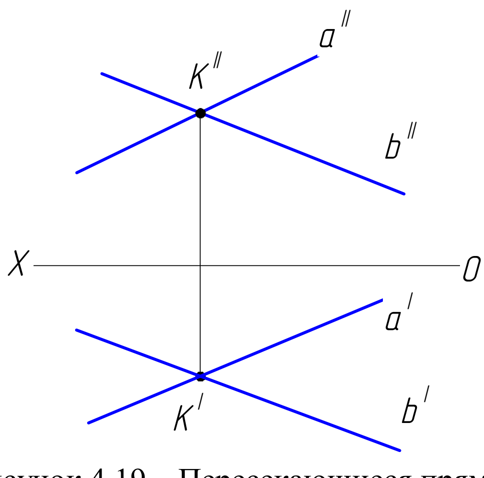


Рисунок 4.19 – Пересекающиеся прямые

В разделе 1.2.1 отмечалось, что проекции точки пересечения прямых есть, точки пересечения одноименных проекций этих прямых:

$$K = a \cap b \Rightarrow K' = a' \cap b';\ K'' = a'' \cap b'';\ K''' = a''' \cap b'''.$$

4.4.2 Параллельные прямые линии

Параллельными (рисунок 4.20) называют прямые, пересекающиеся в бесконечно удаленной точке. Они лежат в одной плоскости. Одноименные проекции параллельных прямых также параллельны. $(a \parallel b \Rightarrow a' \parallel b'; a'' \parallel b''; a''' \parallel b''')$.

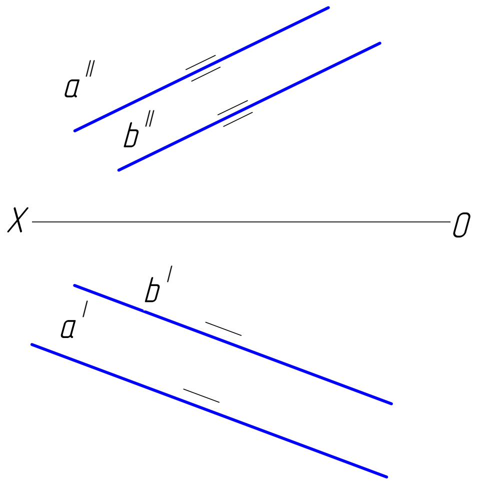
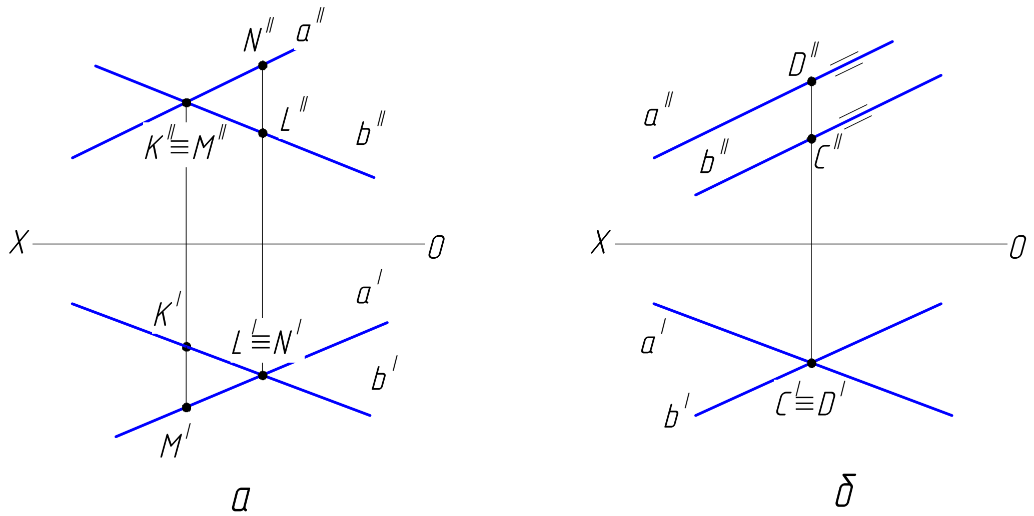


Рисунок 4.20 – Параллельные прямые

4.4.3 Скрещивающиеся прямые линии

Скрещивающимися называют прямые, не имеющие общей точки. Эти прямые не лежат в одной плоскости. Для скрещивающихся прямых справедливы утверждения:

- точки пересечения одноименных проекций на горизонтальной и фронтальной плоскостях проекции не лежат на одном перпендикуляре к оси 0X, т.е. не находятся в проекционной связи (рисунок 4.21 а);
- хотя бы в одной паре одноименные проекции не параллельны (рисунок 4.21 б):



а – обе пары проекций пересекаются б – одна пара проекций пересекается

Рисунок 4.21 – Скрещивающиеся прямые

4.4 Взаимно перпендикулярные прямые. Теорема прямого угла

При рассмотрении свойств проецирования отмечалось, что если стороны угла параллельны плоскости проекций, то он проецируется на эту плоскость в истинную величину. Кроме того, для ортогонального проецирования справедливо следующее утверждение: **если одна сторона прямого угла параллельна плоскости проекций (или лежит в ней), то прямой угол проецируется на эту плоскость без искажения.**

Докажем это для прямого угла ABC, у которого сторона AB параллельна плоскости π_0 (рисунок 4.22):

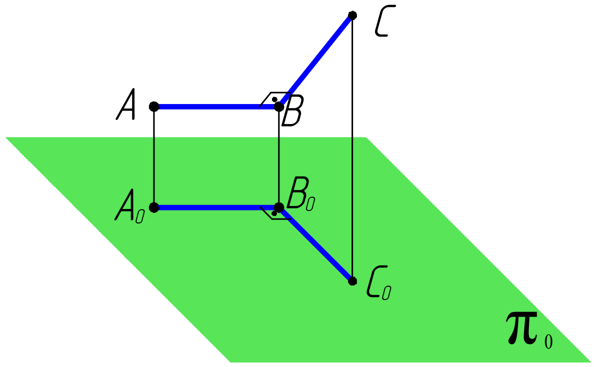


Рисунок 4.22 – Проекция прямого угла

Плоскость BCC_0B_0 перпендикулярна плоскости π_0, т.к. содержит перпендикуляр BB_0 к этой плоскости. Прямая AB перпендикулярна плоскости BCC_0 B_0 вследствие ее перпендикулярности двум пересекающимся прямым этой плоскости ($BC \cap BB_0$). Прямая A_0B_0 параллельна AB, следовательно, она также перпендикулярна плоскости BCC_0B_0, а значит и прямой B_0C_0, лежащей в этой плоскости. Следовательно, угол $A_0B_0C_0$–прямой. На эпюре проекции прямого угла выглядят так:

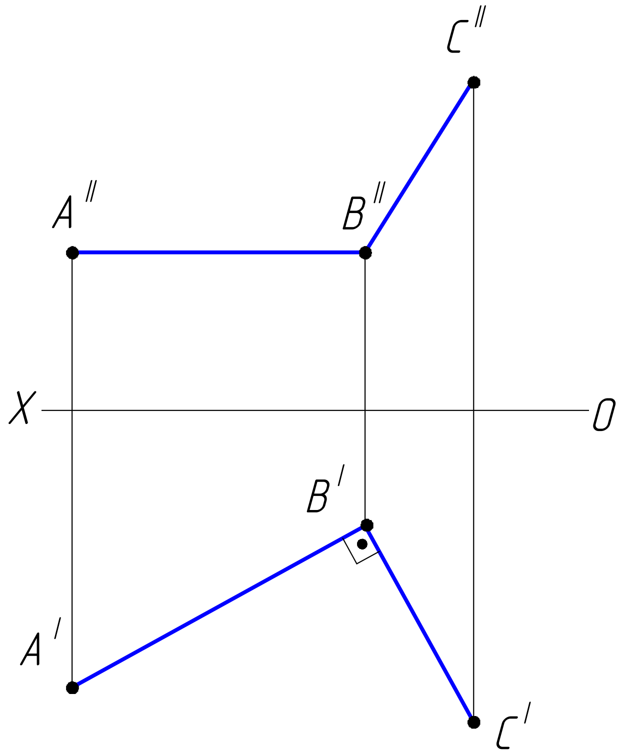


Рисунок 4.23 – Эпюр прямого угла

5 Плоскость.

Плоскость является простейшей поверхностью, для которой справедливо условие: прямая, проходящая через любые две точки такой поверхности, лежит в ней и всеми остальными точками.

Положение плоскости в пространстве однозначно определяется положением трех ее точек, не лежащих на одной прямой.

Следовательно, на эпюре плоскость может быть задана следующими способами:

- проекциями трех точек, не лежащих на одной прямой (рисунок 5.1 а);
- проекция прямой и точки вне ее (рисунок 5.1 б);
- проекциями двух параллельных прямых (рисунок 5.1 в);
- проекциями двух пересекающихся прямых (рисунок 5.1 г).

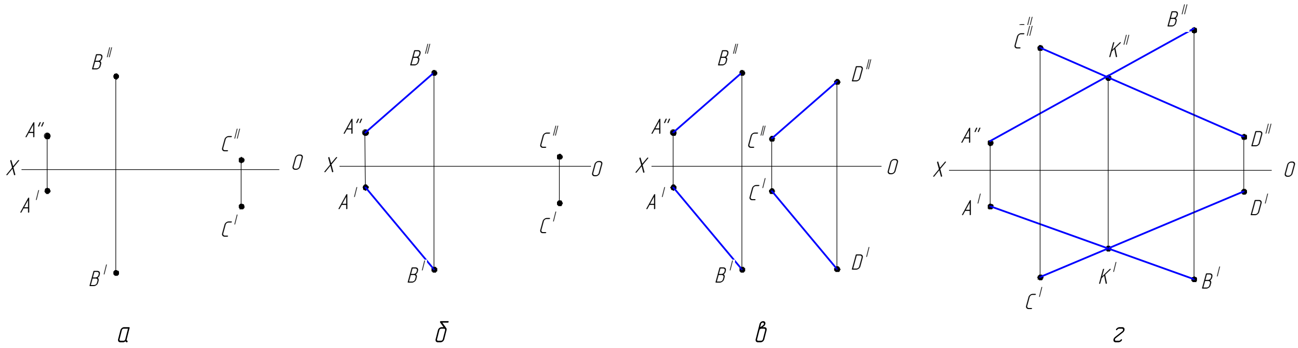


Рисунок 5.1 – Способы задания плоскости

Кроме указанных способов в начертательной геометрии плоскость часто задают еще двумя способами:

- плоской фигурой, лежащей в этой плоскости;
- следами плоскости.

5.1 Задание плоскости плоской фигурой

Плоской называю такую фигуру, все точки которой лежат в одной плоскости и ограничены линиями, составляющими замкнутый контур этой фигуры. К плоским фигурам относятся многоугольники, окружности, эллипсы и т.д. Наиболее простой фигурой, определяющей положение плоскости в пространстве, является треугольник (рисунок 5.2):

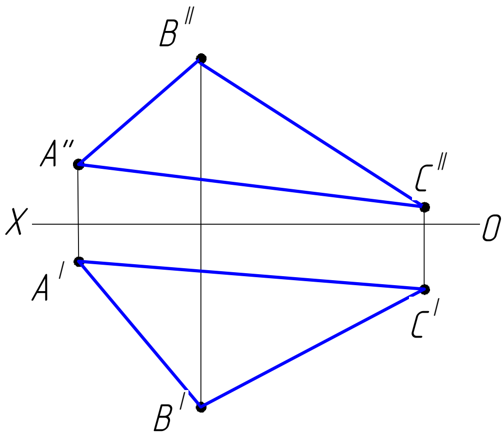


Рисунок 5.2 – Задание плоскости проекциями треугольника

На эпюре построение проекций плоской фигуры сводится к построению проекций ряда точек, образующих контур этой фигуры, и соединению их кривой или отрезками прямых линий. Так, например, четырехугольник может быть задан двумя проекциями трех его вершин и лишь одной проекцией четвертой вершины (рисунок 5.3 а):

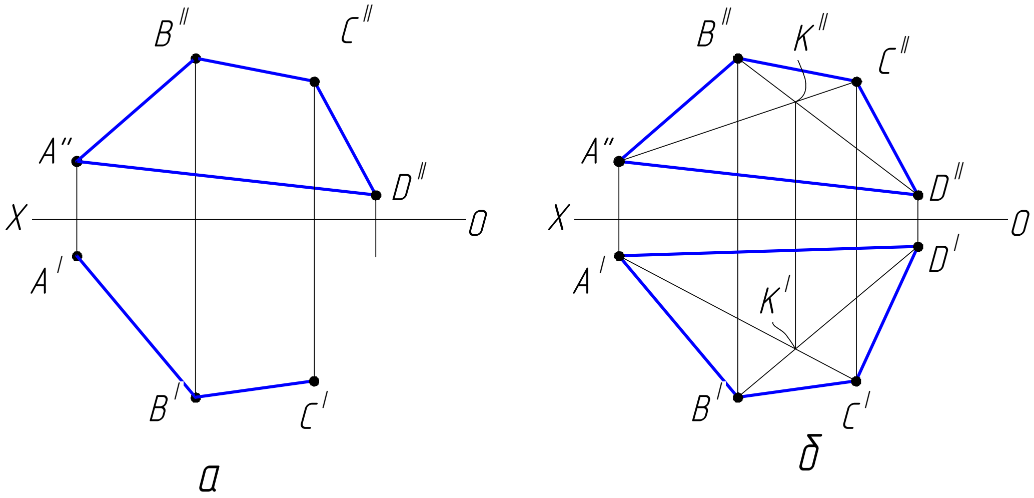


Рисунок 5.3 – Плоскость, заданная проекциями вершин четырехугольника

Недостающая проекция вершины D' лежит на пересечении линии проекционной связи, проведенной из D" и проекции диагонали B'D', проведенной через соответствующую проекцию точки K пересечения диагоналей AC и BD (рисунок 5.3 б).

5.2 Задание плоскости ее следами

Наиболее наглядным является изображение плоскости при помощи ее следов.

Следом плоскости называется линия ее пересечения с плоскостью проекций. На рисунке 5.4 изображена плоскость α, пересекающая все три плоскости проекций.

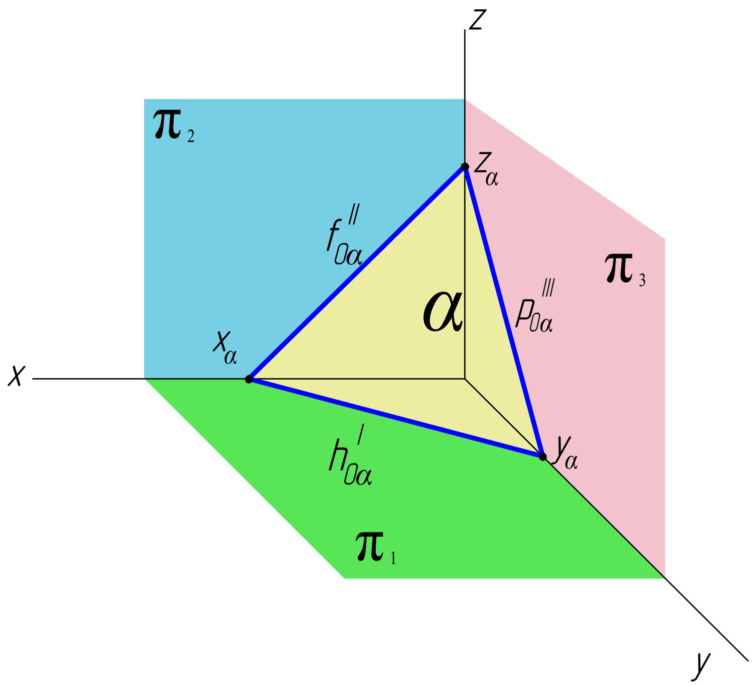


Рисунок 5.4 – Плоскость заданная следами

Плоскость, наклоненную ко всем трем плоскостям проекции на угол, отличный от 0°и 90°, называют плоскостью **общего** положения. В системе трех плоскостей проекции $\pi_1, \pi_2,$ и π_3такая плоскость имеет три следа – соответственно горизонтальный след $h'_{0\alpha}(h'_{0\alpha} = \alpha \cap \pi_1)$, фронтальный след $f''_{0\alpha}(f''{}_{0\alpha} = \alpha \cap \pi_2)$ и профильный след $p'''_{0\alpha}(p'''_{0\alpha} = \alpha \cap \pi_3)$.

Подобное обозначение следов означает, что они являются проекциями линий уровня h, f и p, принадлежащих данной плоскости и находящихся на нулевом расстоянии от соответствующих плоскостей проекции.

Точки x_α,y_α,z_αпересечения следов плоскости с соответствующими осями координат принято называть **точками схода следов**. Нетрудно заметить, что зная положение точек схода следов, можно построить и сами следы: $h'_{0\alpha}(x_\alpha, y_\alpha)$; $f''_{0\alpha}(x_\alpha, z_\alpha)$; $p'''_{0\alpha}(y_\alpha, z_\alpha)$.

Разворачивая плоскости π_1и π_3 до совмещения с плоскостью π_2, получим отображение плоскости α в ортогональной системе координат, т.е. на эпюре (рисунок 5.5):

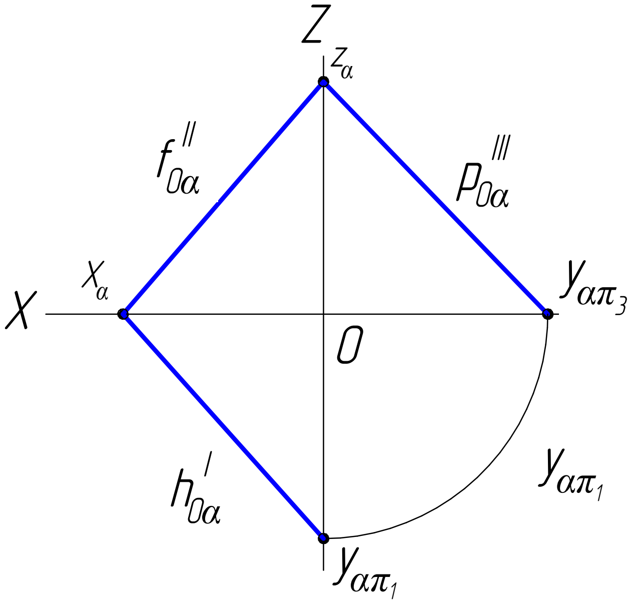


Рисунок 5.5 – Плоскость общего положения на эпюре

Очевидно, что для однозначного определения положения плоскости в пространстве достаточно знать положение двух любых ее следов, т.к. по ним всегда можно построить третий след (исключение составляют плоскости, проходящие через ось координат – построение третьего следа таких плоскостей будет рассмотрено позже).

При выбранной системе координат отрезки $0X_\alpha$=X, $0Y_\alpha$=Y, $0Z_\alpha$=Z называют параметрами плоскости. Три заданных параметра определяют положение плоскости. Параметры плоскости могут различаться не только численно, но и по знаку. Рассмотрим случай построения плоскости α (X,Y,-Z). Откладывая на осях координат значения параметров, получим изображения точек схода следов X_α,Y_α,-Z_α (рисунок 5.6). Соединяя их попарно прямыми линиями, построим соответствующие следы плоскости α.

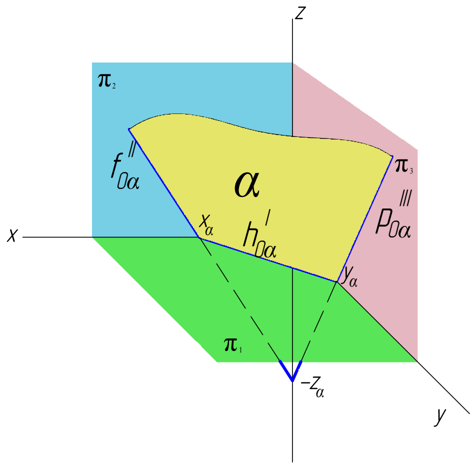


Рисунок 5.6 – Плоскость общего положения при Zα<0

Как правило, сплошными линиями изображают те участки следов, которые располагаются на плоскостях проекции, ограничивающих первый октант.

Изображение следов такой плоскости на эпюре представлено на рисунке 5.7

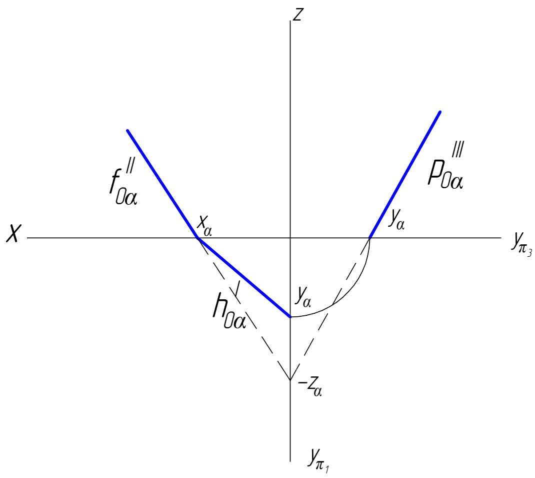


Рисунок 5.7 – Следы плоскости α на эпюре при Zα<0

5.3 Прямая и точка в плоскости

Прямая лежит в плоскости, если она проходит через две точки, принадлежащие этой плоскости. Например, на рисунке 5.8 прямая KL(K'L', K"L") принадлежит плоскости, заданной двумя пересекающимися прямыми AB(A'B', A"B") и BC(B'C', B"C"):

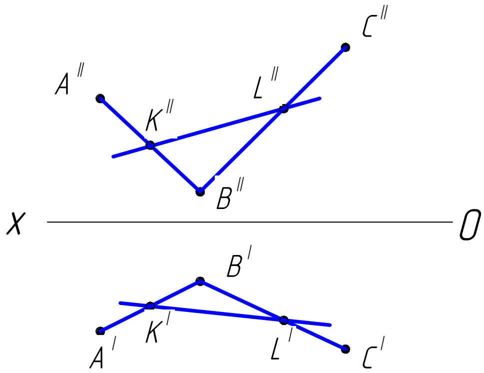


Рисунок 5.8 – Прямая в плоскости, заданной пересекающимися прямыми

Для плоскости, заданной следами, можно утверждать, что прямая АВ лежит в плоскости α, если следы этой прямой находятся на одноименных следах плоскости (рисунок 5.9):

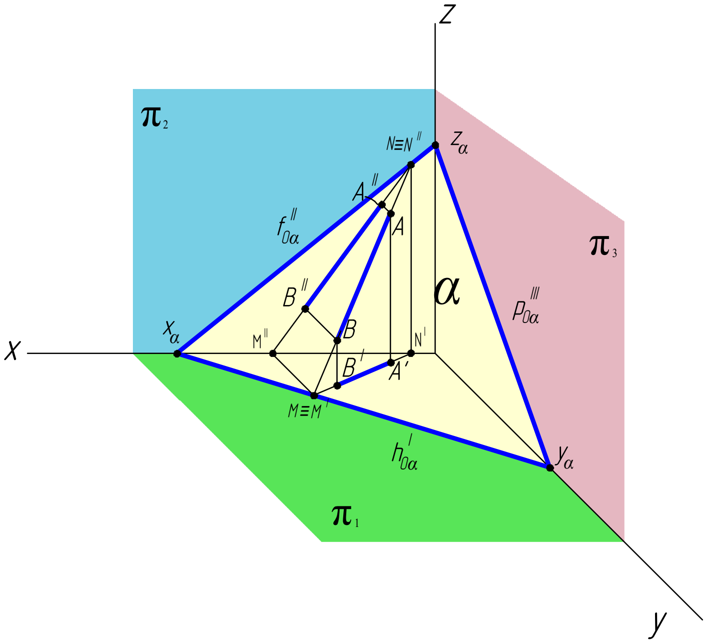


Рисунок 5.9 – Прямая в плоскости, заданной следами

Справедливо и обратное утверждение: плоскость проходит через прямую, если ее следы проходят через одноименные следы этой прямой.

Для плоскости общего положения из этого вытекает важный вывод: если одна из проекций точки находится на одноименном следе плоскости, то ее вторая проекция располагается в проекционной связи на оси координат и наоборот, если одна проекция точки, принадлежащей плоскости, расположена на оси, то ее вторая проекция – на одноименном следе.

В ортогональной системе координат это выглядит так:

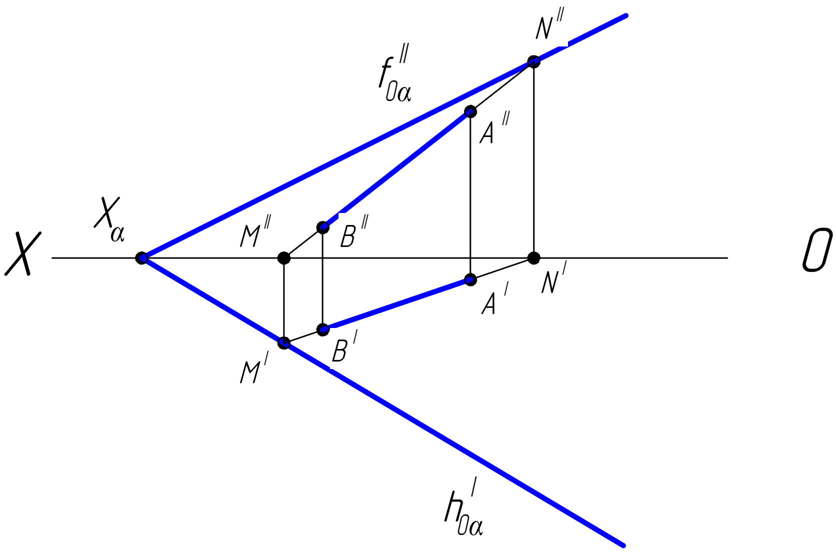


Рисунок 5.10 – Следы прямой в плоскости

Рассмотрим на примере построение проекций точки в плоскости, заданной следами. Пусть требуется построить недостающую проекцию A' точки, лежащей в плоскости $\alpha(h'_{0\alpha}, f''_{0\alpha})$, если задано положение только ее фронтальной проекции A'' (рисунок 5.11)

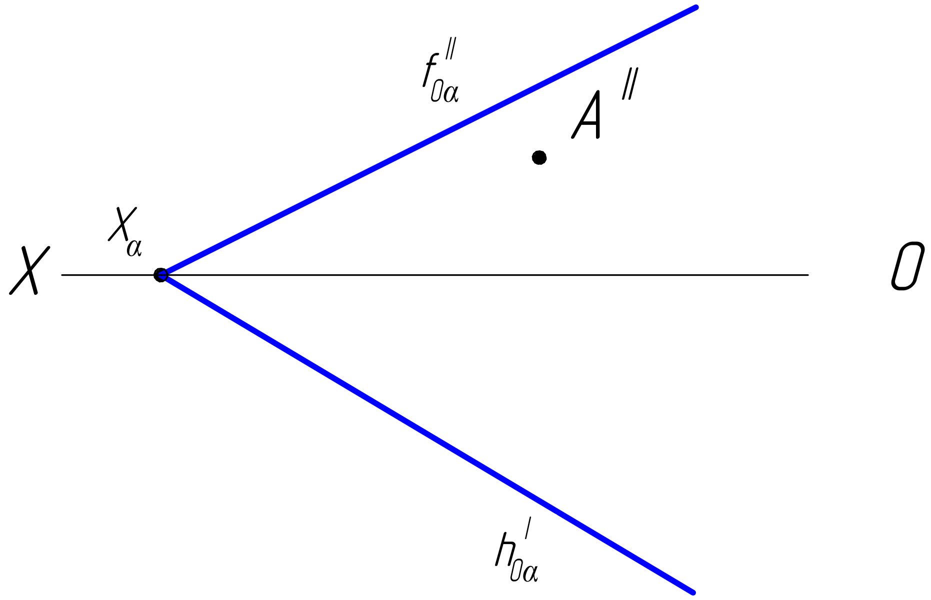
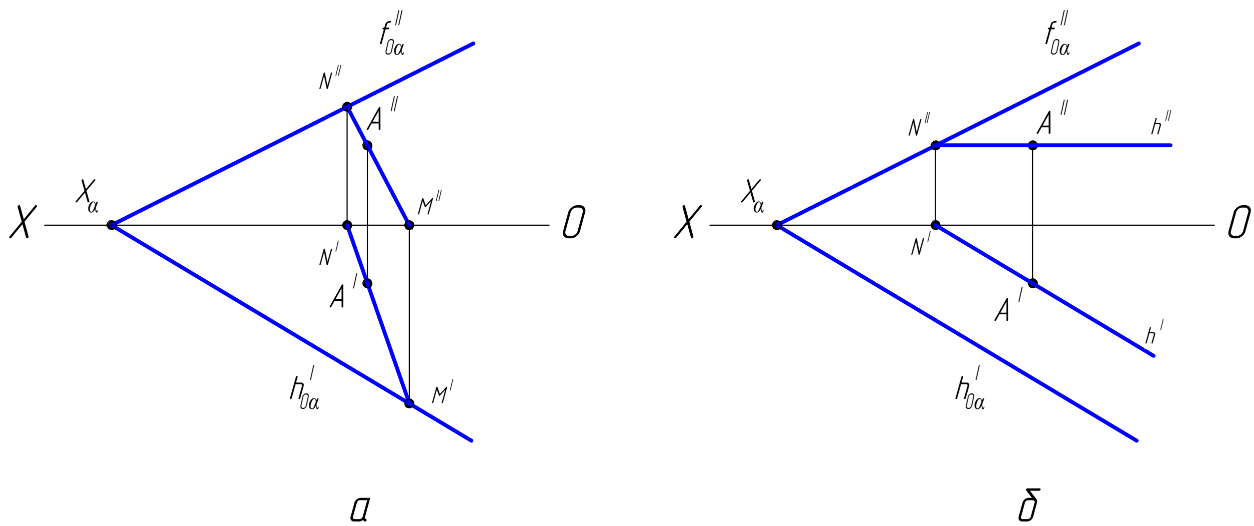


Рисунок 5.11 – Фронтальная проекция точки в плоскости

Известно, что точка принадлежит плоскости, если она принадлежит какой-либо прямой в этой плоскости. Проведем через A'' фронтальную проекцию M'' N'' произвольной прямой общего положения, принадлежащей плоскости α и построим ее горизонтальную проекцию M' N' (рисунок 5.12 а), $MN \in \alpha$, т.к. $N'' \in f''_{0\alpha}$ и $M' \in h'_{0\alpha}$



а – при помощи прямой общего положения; б – при помощи линии уровня

Рисунок 5.12 – Построение недостающей проекции точки в плоскости

Тогда в силу инвариантного свойства проецирования $A'' \in M''N'' \Longrightarrow A' \in M'N'$. Проведя из точки A'' линию проекционной связи до пересечения с M'N', получим искомую проекцию A'.

На рисунке 5.12 б представлено решение той же задачи при помощи построении линии уровня (горизонтали плоскости), проходящей через точку A (см. раздел 5.5).

5.4 Связь между различными способами задания плоскости

Если плоскость задана геометрическими элементами, то для построения ее следов достаточно найти следы двух прямых, принадлежащих данной плоскости.

Рассмотрим, например, построение следов плоскости, заданной двумя параллельными прямыми $AB(A'B', A''B'')$ и $CD(C'D', C''D'')$, представленными на рисунке 5.13

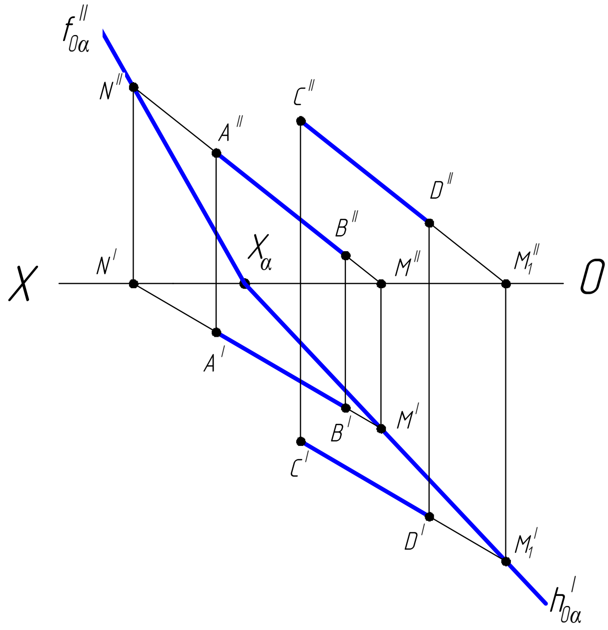


Рисунок 5.13 – Построение следов плоскости при помощи следов прямых в этой плоскости

Для построения горизонтального следа этой плоскости необходимо найти горизонтальные проекции горизонтальных следов прямых AB и CD. Продолжив $A''B''$до пересечения с осью OX, получим фронтальные проекции горизонтальных следов M″ и M_1'' соответственно.

Точки M′ и M_1' находятся в проекционной связи на A'B' и C'D'. Через M′ и M_1'строим горизонтальный след плоскости $h'_{0\alpha}$. На оси отмечаем точку схода следов X_α. Для построения фронтального следа плоскости $f''_{0\alpha}$ достаточно найти фронтальную проекцию фронтального следа N'' одной из прямых. Продолжив A'B' до пересечения с осью 0X отмечаем N'. Точка N'' располагается в проекционной связи на A''B''. Через точки N'' и X_α проводим фронтальный след $f''_{0\alpha}$.

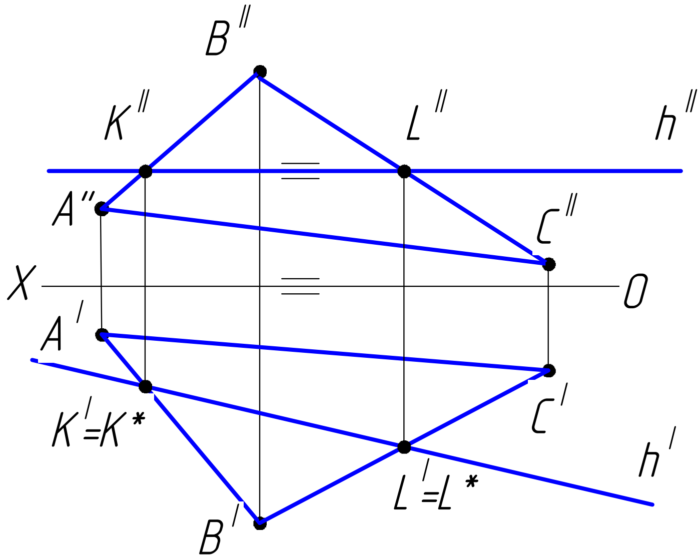
5.5 Частные случаи положения прямой в плоскости

Рассмотрим некоторые прямые, лежащие в плоскости и занимающие частные положения относительно плоскостей проекции.

5.5.1 Горизонталь плоскости

Горизонталь плоскости – это прямая, лежащая в данной плоскости и параллельная плоскости проекций π_1. Она обладает всеми свойствами горизонтальной прямой: ее фронтальная проекция параллельна оси OX, а горизонтальная проекция есть истинная величина.

На рисунке 5.14 представлена горизонталь h, заданная отрезком $KL(K'L', K''L'')$ в плоскости треугольника $ABC(A'B'C', A''B''C'')$.



$K''L'' \parallel 0X$

$K'L' \equiv K^*L^*$

Рисунок 5.14 – Горизонталь в плоскости треугольника

Если плоскость задана следами, то фронтальный след горизонтали находится на одноименном следе плоскости $(N \equiv N'' \in f''_{0\alpha})$, а горизонтальная проекция горизонтали параллельна горизонтальному следу этой плоскости (рисунок 5.15):

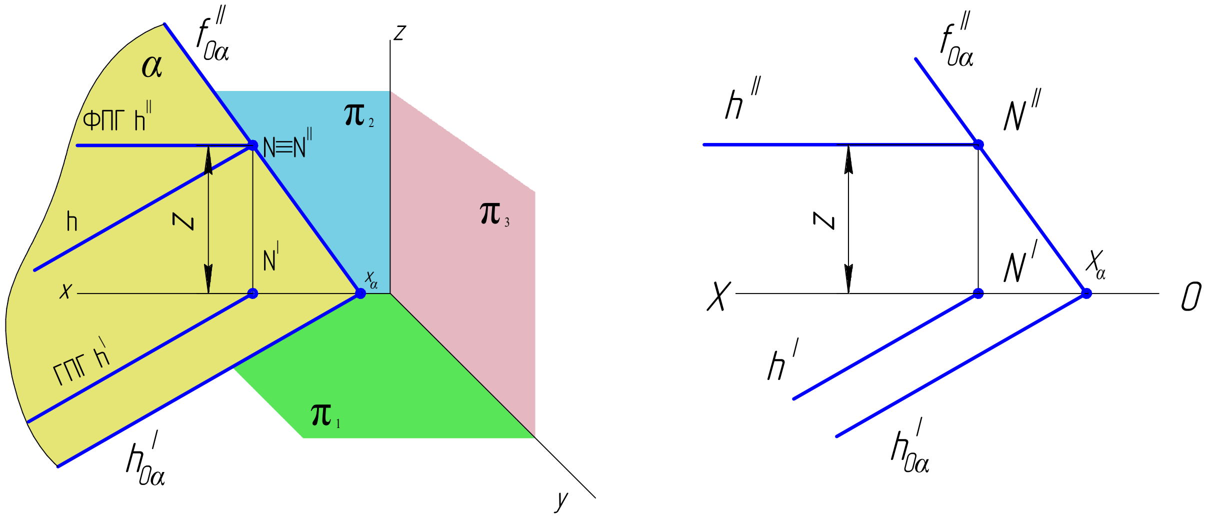


Рисунок 5.15 – Горизонталь плоскости

Важно помнить: **для горизонтали плоскости всегда $h'' \parallel 0X$; $h' \parallel h'_{0\alpha}$**

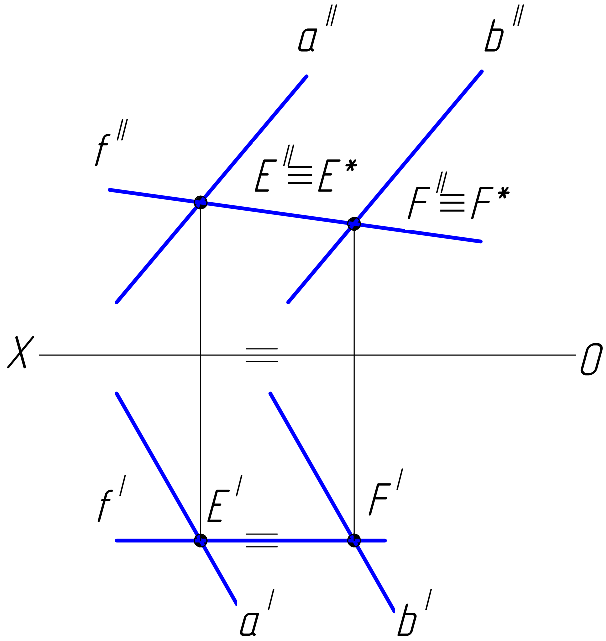
Расстояние горизонтали от горизонтальной плоскости проекций π_1 определяется координатой Z.

В системе трех плоскостей проекции горизонталь плоскости, как и любая горизонтальная прямая имеет лишь два следа – фронтальный N и профильный P.

5.5.2 Фронталь плоскости

Фронталь плоскости – это прямая лежащая в данной плоскости и параллельная фронтальной плоскости проекций π_2.

Горизонтальная проекция фронтали всегда параллельна оси 0x, а ее фронтальная проекция есть истинная величина. На рисунке 5.16 представлена фронталь $f(f',f'')$, определенная отрезком $EF(E'F',E''F'')$, и построенная в плоскости заданной двумя параллельными прямыми $a(a'a'')$ и $b(b'b'')$.



$$E'F' \parallel 0X$$
$$E''F'' \equiv E^*F^*$$

Рисунок 5.16 – Фронталь плоскости, заданной параллельными прямыми

В плоскости, заданной следами, горизонтальный след фронтали находится на одноименном следе плоскости $(M \equiv M' \in h'_{0\alpha})$, а фронтальная проекция фронтали параллельна фронтальному следу этой плоскости $(f'' \parallel f''_{0\alpha})$ (рисунок 5.17)

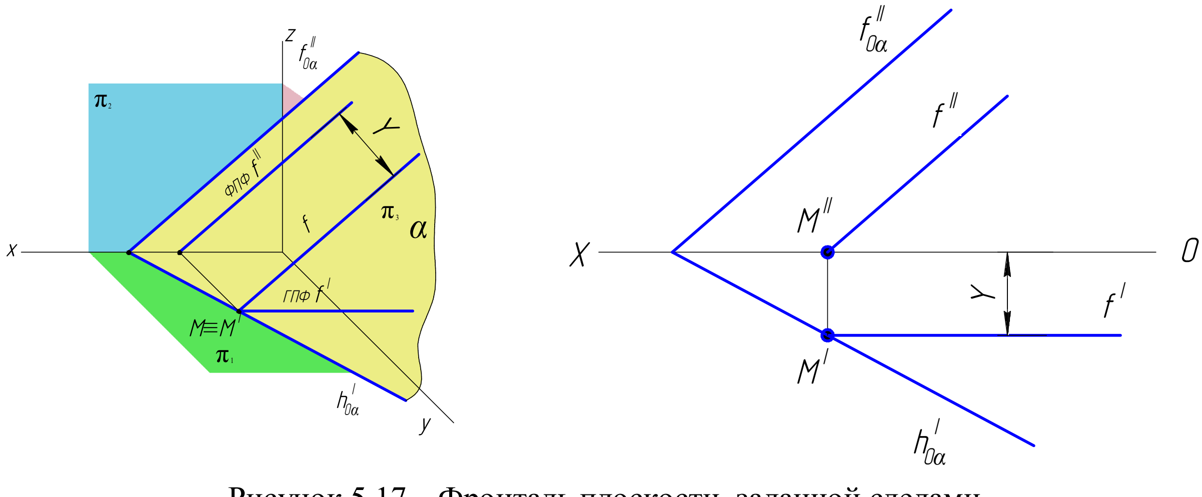


Рисунок 5.17 – Фронталь плоскости, заданной следами

Важно помнить: **для фронтали плоскости всегда $f' \parallel 0X$; $f'' \parallel f''_{0\alpha}$.**

Линиями уровня удобно пользоваться для построения недостающих проекция точек, лежащих в данной для плоскости. Рассмотрим это на примере.

Пример 5. 1. Построить недостающую проекцию треугольника АВС, лежащего в плоскости α, если задана лишь его горизонтальная проекция (рисунок 5.18)

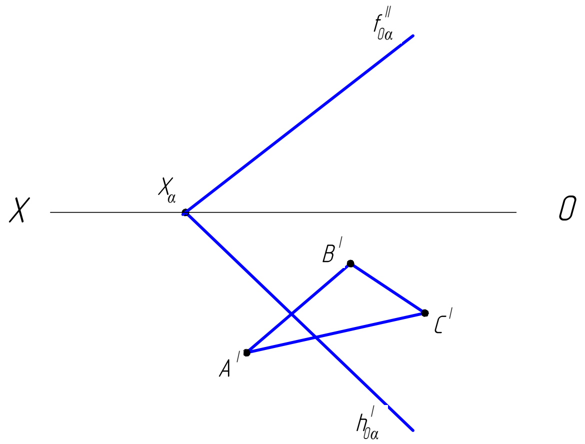


Рисунок 5.18 – Условие примера 5.1

Задача сводится к построению фронтальных проекция точек A'', B'', C''. Для построения A''в качестве вспомогательной прямой воспользуемся горизонталью плоскости α, проведенной через точку A (рисунок 5.19). С этой целью строим $h_1' \parallel h_{0\alpha}'$ через A'до пересечения с 0X. На оси отмечаем N_1'(горизонтальная проекция фронтального следа). Фронтальная проекция N_1'' находится в проекционной связи на продолжении фронтального следа $f_{0\alpha}''$ (см.раздел 5.3). Фронтальную проекцию точки A'' отмечаем в проекционной связи с A' на фронтальной проекции горизонтали h'', проведенной через N_1'' параллельно оси 0X.

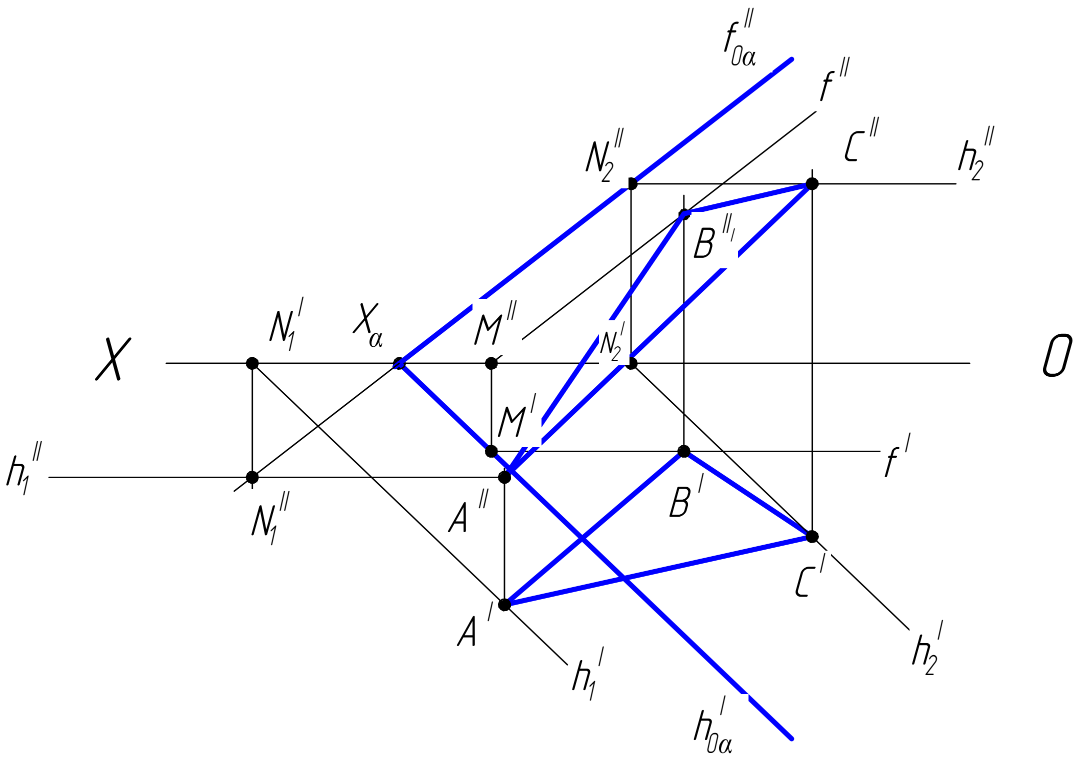


Рисунок 5.19 – Построение недостающей проекции фигуры в плоскости

Для нахождения фронтальной проекции точки B'' используем фронталь f плоскости, проведённую через точку B. С этой целью проводим через B' горизонтальную проекцию фронтали $f' \parallel 0X$. На следе $h'_{0\alpha}$ отмечаем горизонтальную проекцию горизонтального следа M'. В проекционной связи на оси 0X отмечаем M''. Точку B'' строим на фронтальной проекции фронтали f'', проведенной параллельно следу $f''_{0\alpha}$, в проекционной связи с B'. Построение точки C'' выполним аналогично тому, как это проводилось для точки A''.

5.5.3 Линия наибольшего наклона плоскости

К частным случаям положения прямых, лежащих в плоскостях, относят также прямые, перпендикулярные к следам плоскости или линиям уровня этих плоскостей (напомним, линии уровня параллельны соответствующим следам). Такие прямые характеризуют углы наклона заданной плоскости к плоскостям проекции и называются линиями наибольшего наклона плоскости.

Прямую, лежащую в плоскости, и перпендикулярную горизонтальному следу, называют линией наибольшего ската плоскости (рисунок 5.20)

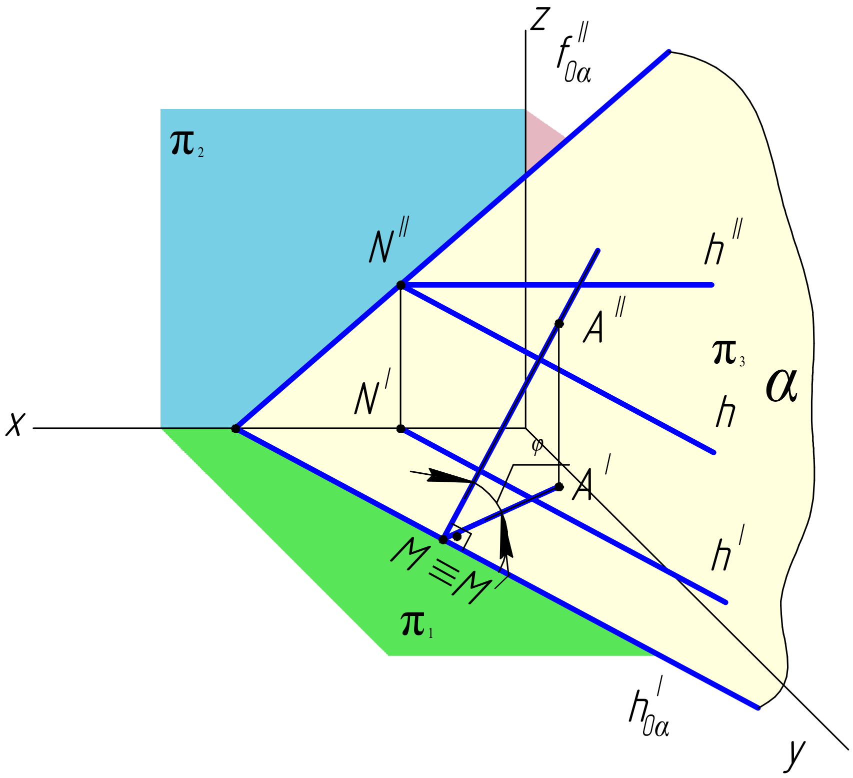
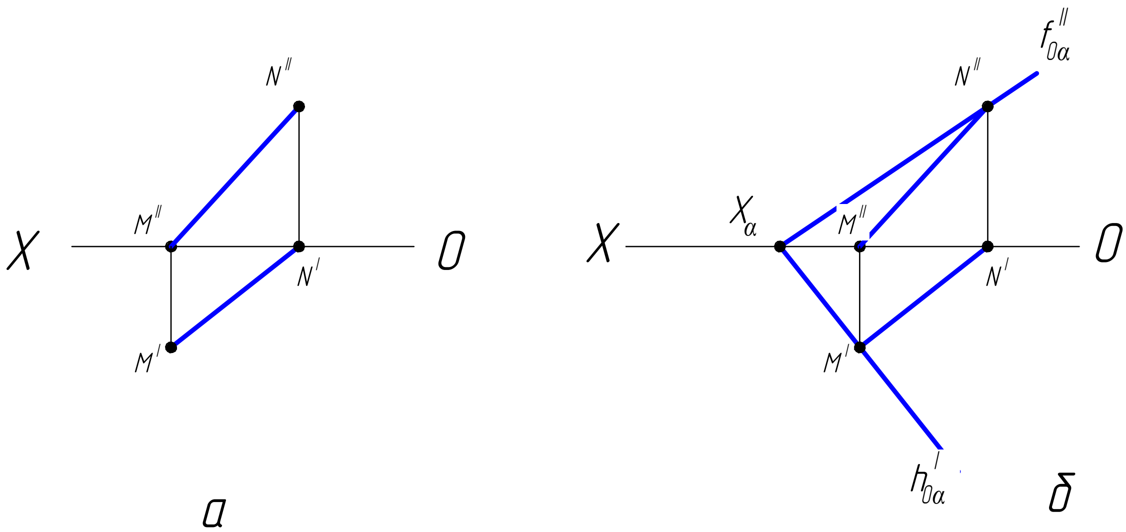


Рисунок 5.20 – Линия наибольшего ската плоскости

Прямой угол между линей наибольшего ската и любой горизонталью этой плоскости проецируется на плоскость π_1 без искажения. Следовательно, горизонтальная проекция линии наибольшего ската всегда перпендикулярна горизонтальной проекции любой горизонтали или горизонтальному следу плоскости, т.е. $A'M' \perp h'_{0\alpha}$.

Если задана линия наибольшего ската, то задана и сама плоскость. Пусть задана линия наибольшего ската $MN(M'N',\ M''N'')$ (рисунок 5.21 а)



а – проекция линии наибольшего ската

б – следы плоскости, построенной по линии наибольшего ската

Рисунок 5.21 – Построение следов плоскости линии наибольшего ската

Для построения следов искомой плоскости проводим через M' горизонтальный след $h'_{0\alpha} \perp M'N'$. На оси 0X отмечает точку схода следов X_α. Через X_α и N'' строим фронтальный след $f''_{0\alpha}$, т.е. плоскость определена.

5.6 Частные случаи положения плоскости

К плоскостям **частного** положения относятся плоскости, перпендикулярные или параллельные плоскостям проекции, а также плоскости, проходящие через ось координат.

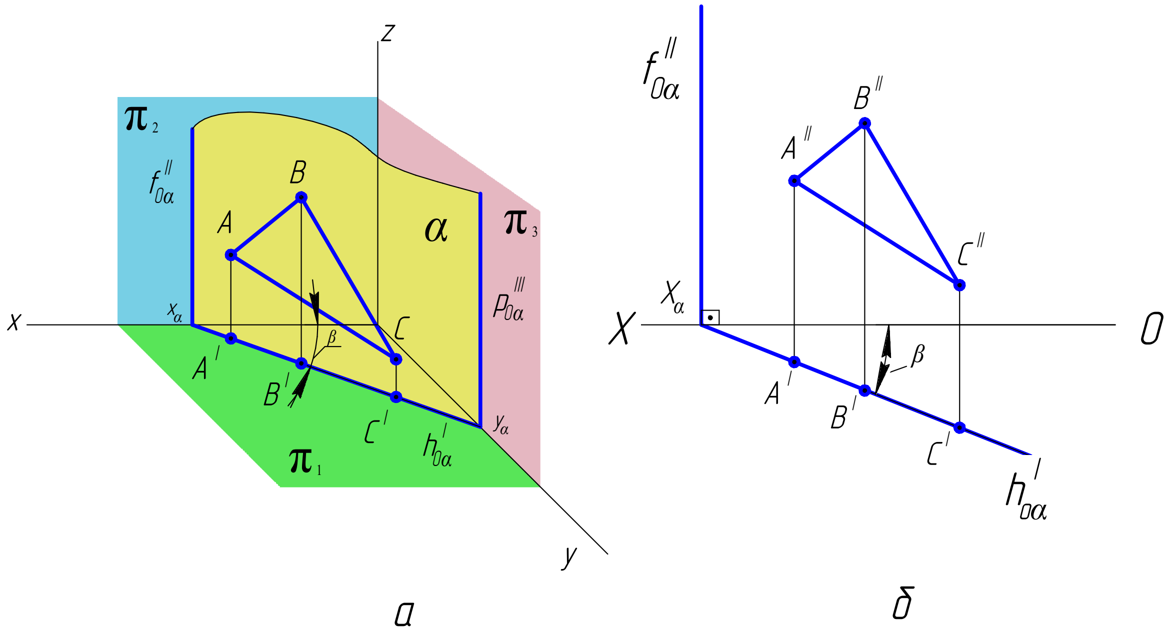
5.6.1 Проецирующие плоскости

Плоскости, перпендикулярные какой-либо одной плоскости проекций, называются проецирующими. Возможны следующие случаи положения проецирующих плоскостей:

- горизонтально – проецирующие плоскости;
- фронтально – проецирующие плоскости;
- профильно – проецирующие плоскости.

5.6.1.1 Горизонтально – проецирующая плоскость

Горизонтально – проецирующей называют плоскость, перпендикулярную плоскости π_1 (рисунок 5.22). Фронтальный $f''_{0\alpha}$ и профильный $P'''_{0\alpha}$ следы такой плоскости параллельны оси 0Z. Основное свойство горизонтально – проецирующей плоскости состоит в том, что горизонтальная проекция любого геометрического элемента, расположенного в ней, будет находиться на горизонтальном следе $h'_{0\alpha}$. На рисунке 5.22, ΔABC принадлежит горизонтально – проецирующий плоскости α, т.о. $\alpha \perp \pi_1, \Delta ABC \in \alpha \Longrightarrow A'B'C' \epsilon h'_{0\alpha}$

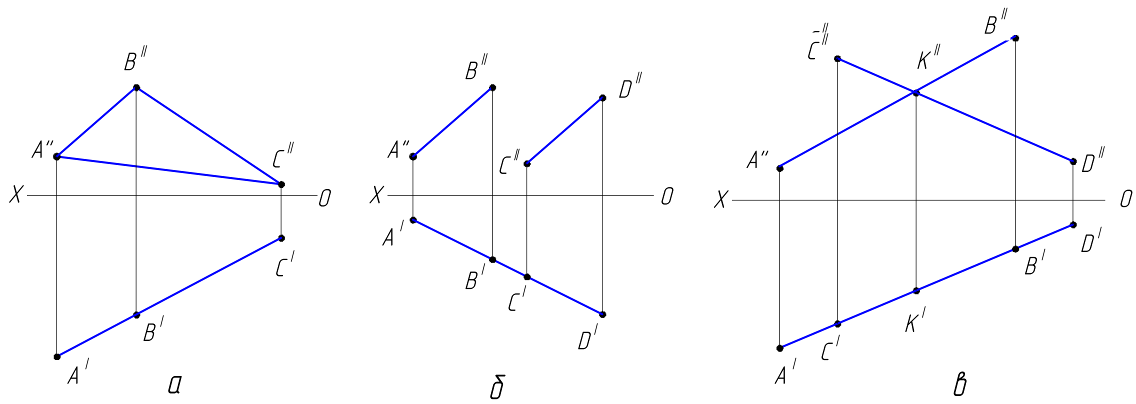


а – в аксонометрических осях б – на эпюре

Рисунок 5.22 –Горизонтально – проецирующая плоскость

Угол β между горизонтальным следом $h'_{0\alpha}$ и осью 0X определяет угол наклона данной плоскости к плоскости проекции π_2.

На рисунке 5.23 представлены горизонтально – проецирующие плоскости, заданные различными геометрическими элементами:



а – геометрической фигурой

б – параллельными прямыми

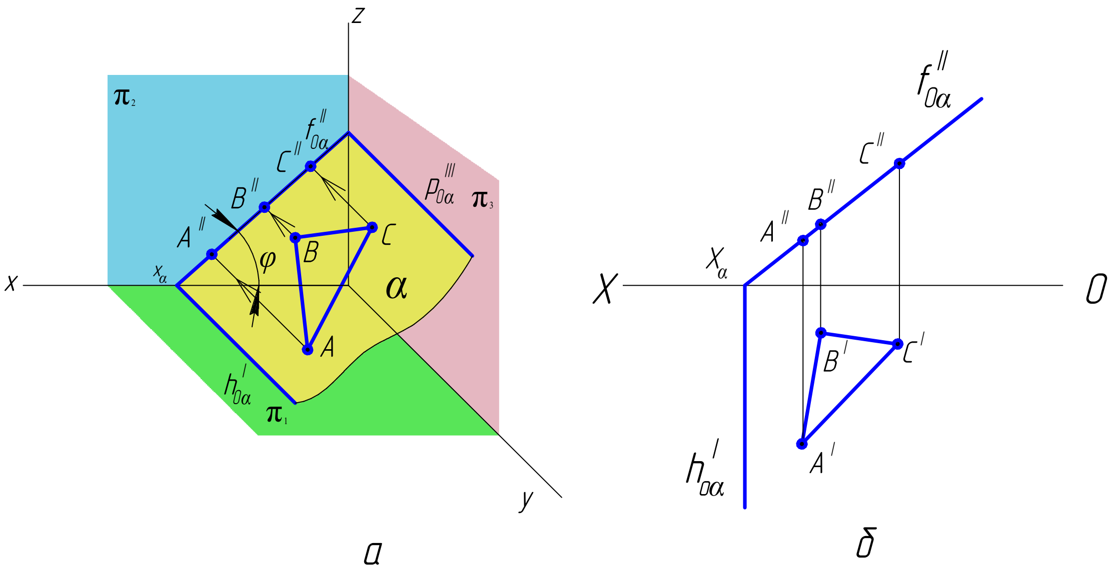
в – пересекающимися прямыми

Рисунок 5.23- Горизонтально – проецирующие плоскости, заданные

5.6.1.2 Фронтально – проецирующая плоскость

Фронтально – проецирующей называют плоскость, перпендикулярную плоскости π_2 (рисунок 5.24). Горизонтальный $h'_{0\beta}$ и профильный $P'''_{0\beta}$ следы такой плоскости параллельны оси 0Y. Основное свойство фронтально – проецирующей плоскости: фронтальная проекция любого геометрического элемента, расположенного в ней, находится на фронтальном следе $f''_{0\alpha}$.

$$\beta \perp \pi_2, \Delta ABC \in \beta \Longrightarrow A''B''C'' \epsilon f''_{0\alpha}$$



а – в аксонометрических осях

б – на эпюре

Рисунок 5.24 - Фронтально – проецирующая плоскость

Угол φ между фронтальным следом $f''_{0\beta}$ и осью 0X определяет угол наклона фронтально – проецирующей плоскости к плоскости проекции π_1.

Фронтальная проекция любых геометрических элементов, определяющих положение фронтально – проецирующей плоскости, есть прямая линия (рисунок 5.25):

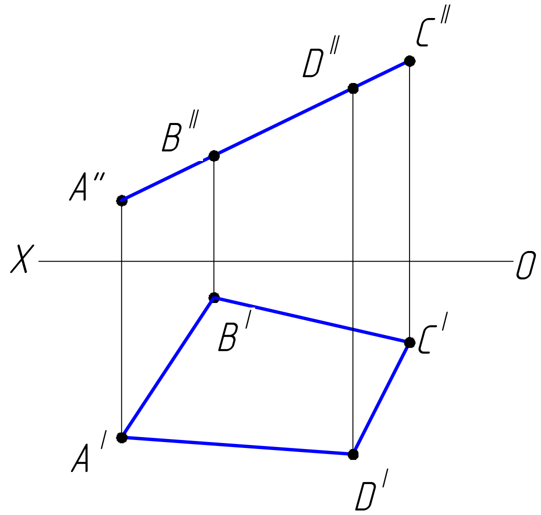
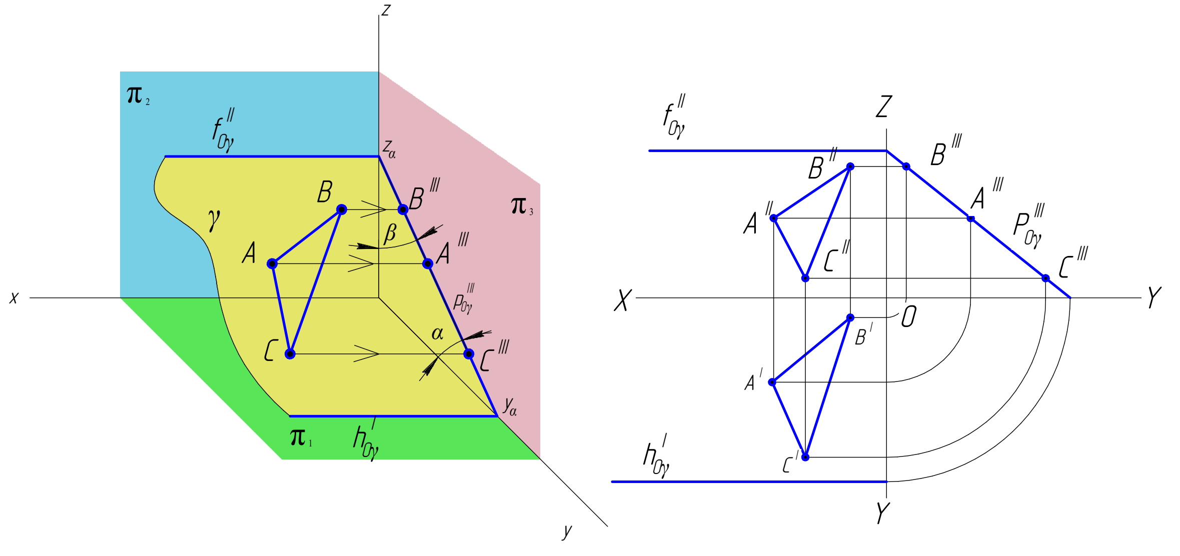


Рисунок 5.25 – Фронтально – проецирующая плоскость, заданная проекциями четырехугольника $ABCD$

5.6.1.3 Профильно-проецирующая плоскость

Профильно-проецирующей называют плоскость, перпендикулярную плоскости π_3 (рисунок 5.26). У такой плоскости горизонтальный $h'_{0\gamma}$ и фронтальный $f''_{0\gamma}$ следы параллельны оси 0X. Профильная проекция любого геометрического элемента, расположенного в ней, находится на профильном следе $P'''_{0\gamma}$.



а б

$$\gamma \perp \pi_3, \Delta ABC \in \gamma \Longrightarrow A'''B'''C'''\epsilon P'''_{0\gamma}$$

а – в аксонометрических осях

б – на эпюре

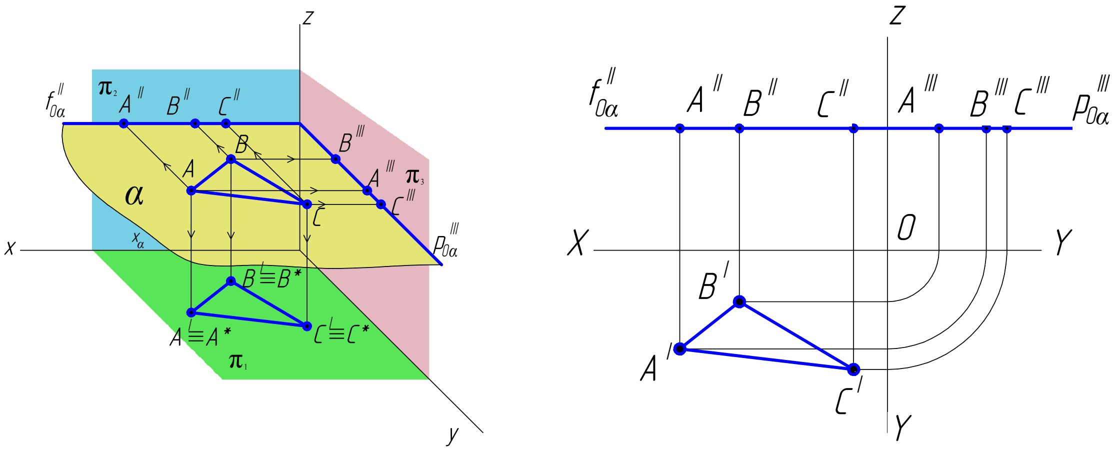
Рисунок 5.26 – Профильно-проецирующая плоскость

Углы α и β определяют углы наклона профильно-проецирующей плоскости к плоскостям проекции π_1 и π_2 соответственно.

5.6.2 Плоскости, параллельные плоскостям проекции

Если заданная плоскость параллельна какой-либо плоскости проекций, то она перпендикулярна двум другим плоскостям проекции. Такие плоскости называются *дважды проецирующими или плоскостями уровня.*

Плоскость параллельная плоскости π_1 называется горизонтальной. Фигура, расположенная в такой плоскости, проецируется на плоскость π_1 в истинную величину, (рисунок 5.27 а), а фронтальный и профильный следы такой плоскости на эпюре сливаются в одну линию (рисунок 5.27 б):



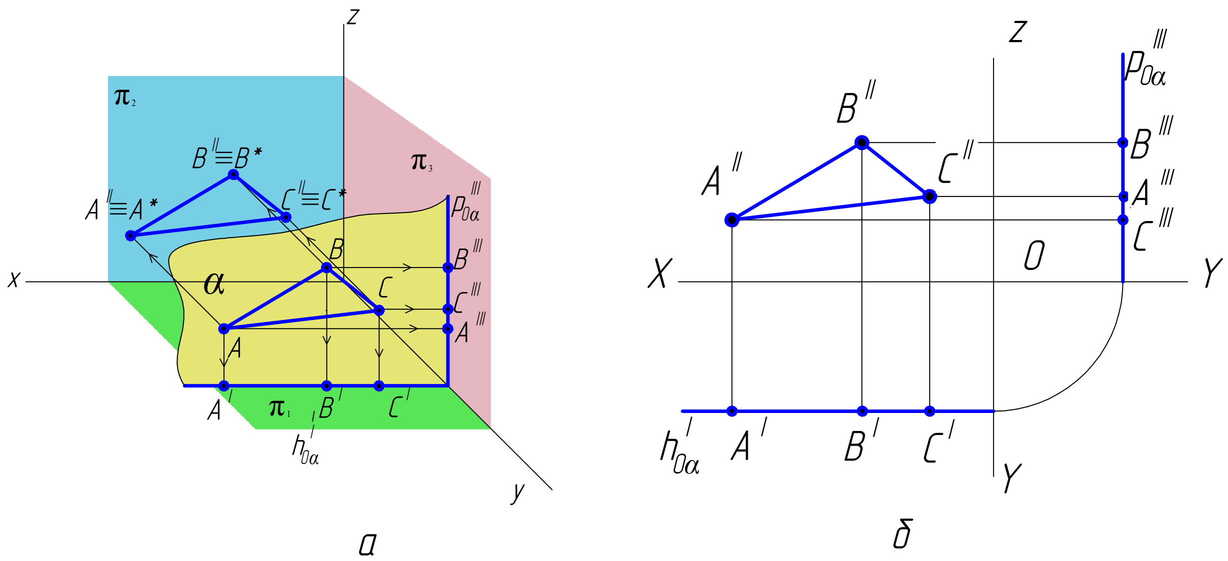
а б

а – в аксонометрических осях б – на эпюре

Рисунок 5.27 – Фигура в горизонтальной плоскости

Плоскость, параллельная плоскости π_2, называется фронтальной. Фигура, расположенная в ней, проецируется на плоскость π_2 без искажения (рисунок 5.28 а), а на две другие в виде прямой линии на соответствующих следах (рисунок 5.28 б).

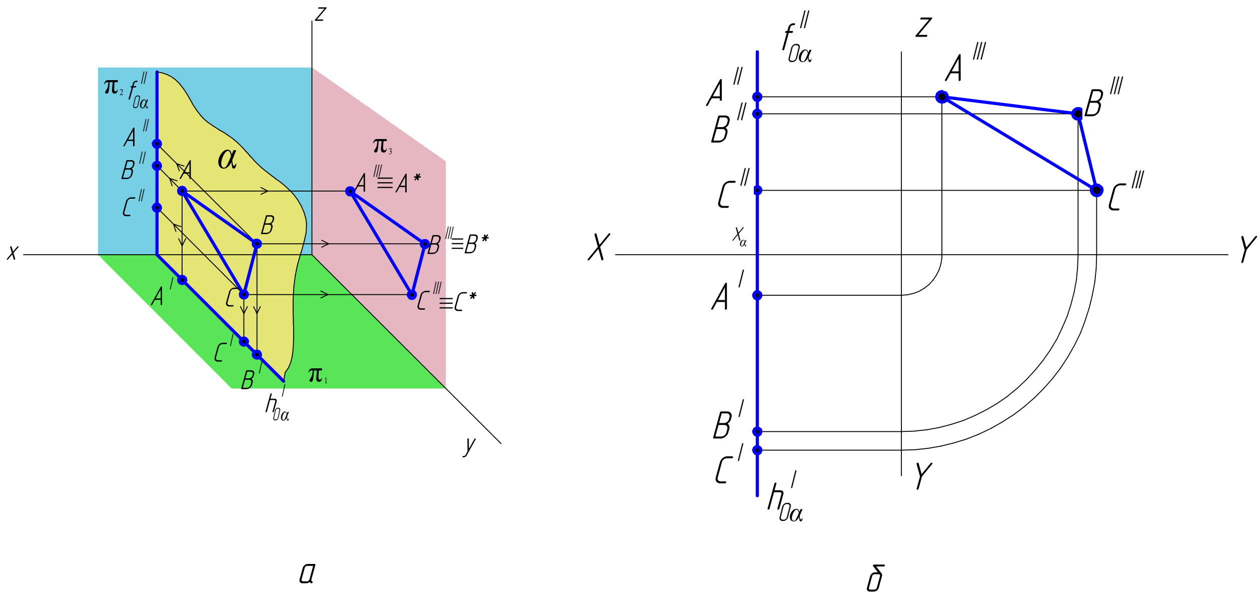
Горизонтальный след $h'_{0\alpha}$ такой плоскости параллелен оси 0X, а профильный $P'''_{0\alpha}$ - оси 0Z.



а – в аксонометрических осях б – на эпюре

Рисунок 5.28 – Фигура во фронтальной плоскости

Плоскость, параллельная плоскости π_3, называется профильной. Фигура, расположенная в ней, проецируется на плоскость π_3 в натуральную величину, а на две другие – в виде прямой линии на соответствующих следах (рисунок 5.29 а). Горизонтальный $h'_{0\alpha}$ и фронтальный $P'''_{0\alpha}$ следы профильной плоскости на эпюре сливаются в одну линию (рисунок 5.29 б).

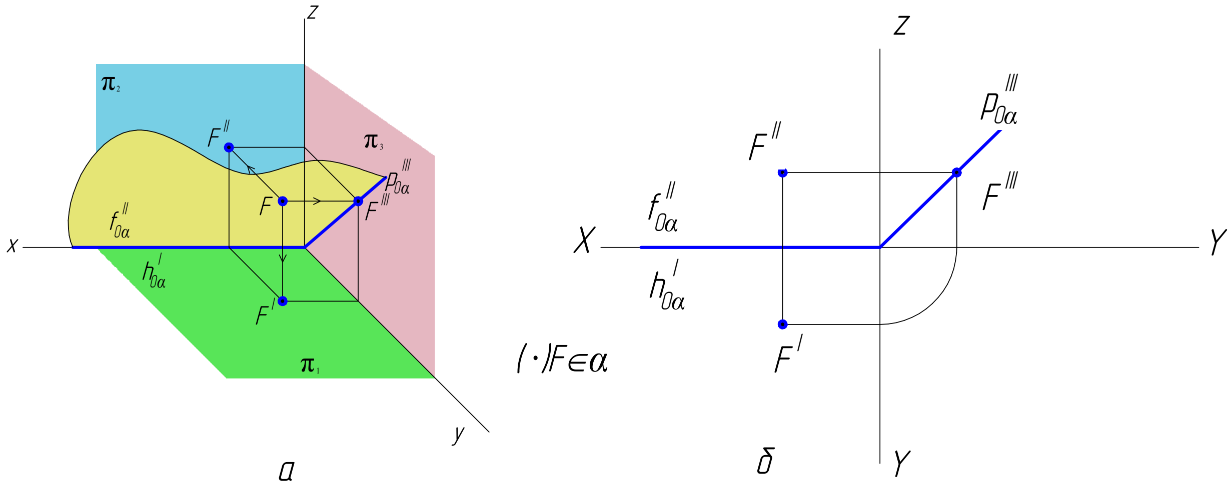


а – в аксонометрических осях б – на эпюре

Рисунок 5.29 б – Фигура в профильной плоскости

5.6.3 Плоскости, проходящие через ось координат

Плоскость, проходящую через ось координат, называют *осевой.* Поскольку такая плоскость всегда перпендикулярна какой-либо плоскости проекций, то она является частным случаем горизонтально-, фронтально- или профильно-проецирующей плоскости. У осевой плоскости два следа совпадают с одной из осей координат (на рисунке 5.30 а – с осью 0X). Для однозначного определения положения такой плоскости необходимо знать либо положение всех трех ее следов, либо двух ее сливающихся следов и хотя бы одной точки вне заданных следов и лежащей в этой плоскости (рисунок 5.30 б):



а – в аксонометрических осях б – на эпюре

Рисунок 5.30 – Осевая плоскость, проходящая через ось 0X

Осевая плоскость, делящая угол между двумя плоскостями проекций π_1 и π_2 пополам, называются *биссекторной* плоскостью. Любая точка этой плоскости равноудалена от фронтальной и горизонтальной плоскостей проекции.

6 Относительное положение прямой и плоскости

Возможны следующие случаи взаимного положения прямой и плоскости:

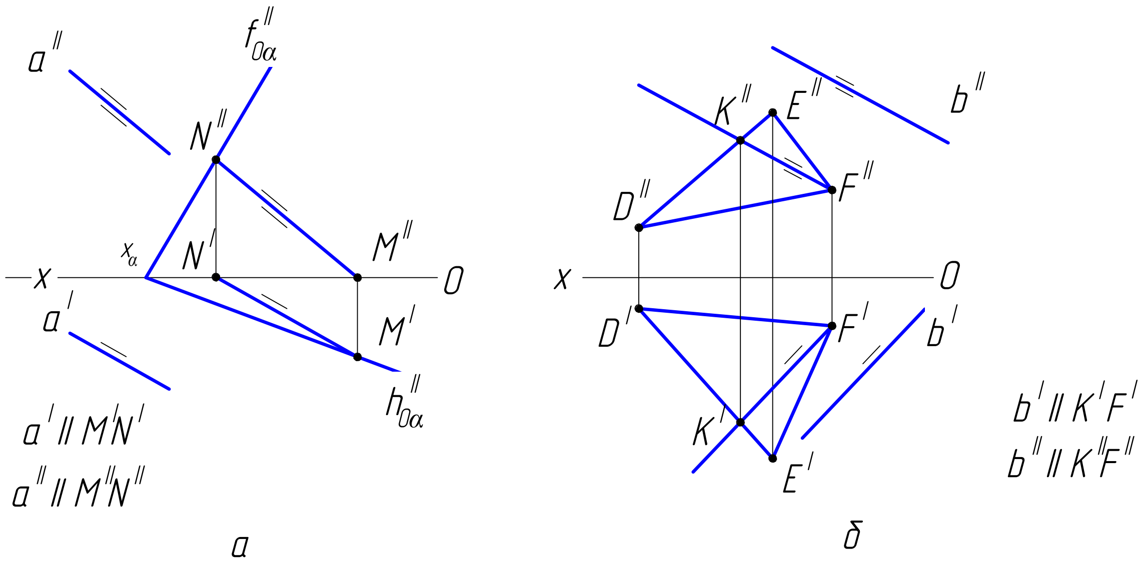
- прямая лежит в плоскости;
- прямая параллельна плоскости;
- прямая перпендикулярна плоскости;
- прямая пересекает плоскость под произвольным углом.

Случай положения прямой в плоскости рассматривался ранее (раздел 5.3). Напомним лишь, что прямая лежит в плоскости, если ее следы расположены на соответствующих следах плоскости.

6.1 Прямая, параллельная плоскости

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-либо прямой, принадлежащей этой плоскости.

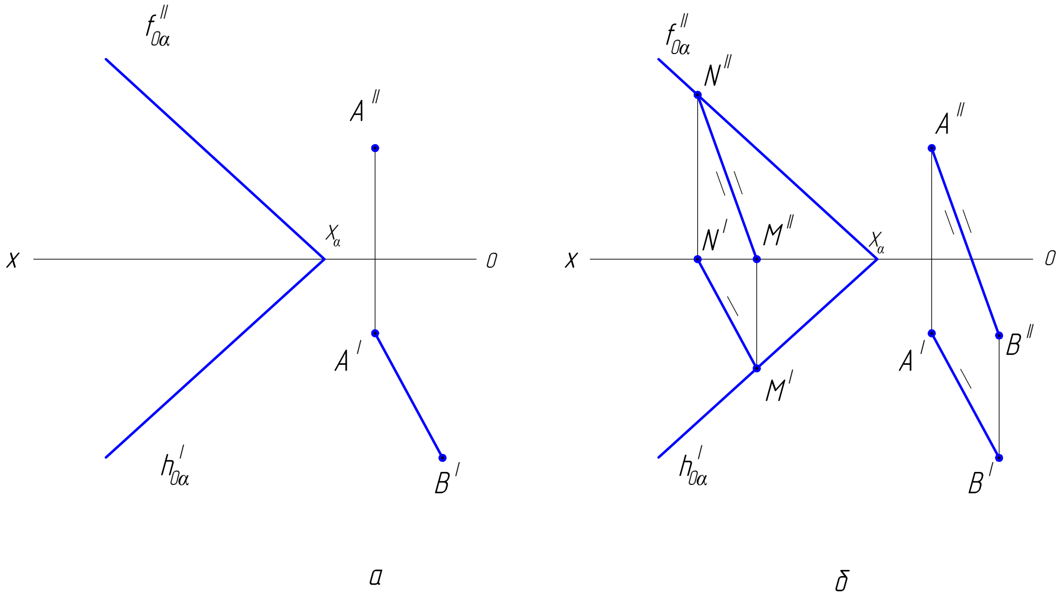
На рисунке 6.1 представлены прямые, параллельные плоскостям, заданным различными способами: прямая $a(a'a'')$ параллельна плоскости α, заданной следами (рисунок 6.1 а) и прямая $b(b'b'')$ параллельна плоскости треугольника DEF (рисунок 6.1 б):



а – заданной следами б – заданной плоской фигурой

Рисунок 6.1 – Прямая, параллельная плоскости

Рассмотрим на примере построение недостающей проекции прямой, параллельной заданной плоскости. Пусть даны плоскость $\alpha(h'_{0\alpha}, f''_{0\alpha})$, горизонтальная проекция $A'B'$прямой, параллельной плоскости α. Требуется построить $A''B''$ при условии, что $AB \parallel \alpha$. Для определения однозначного положения прямой в пространстве требуется задать фронтальную проекцию точки на этой прямой (рисунок 6.2 а):



а – исходные данные б – недостающая проекция

Рисунок 6.2 – Построение недостающей проекции прямой, параллельной плоскости

Для решения задачи в плоскости α строим проекции прямой MN, параллельной заданной прямой, т.е. проводим $M'N' \parallel A'B'$. Затем в проекционной связи строим $M''N''$. Искомую фронтальную проекцию $A''B''$проводим параллельно $M''N''$(рисунок 6.2 б).

6.2 Прямая, перпендикулярная плоскости

Прямая перпендикулярна плоскости, если ее ортогональные проекции перпендикулярны одноименным следам плоскости. Справедливо и обратное утверждение, т.е. $a \perp \alpha \Leftrightarrow a' \perp h'_{0\alpha}, a'' \perp f''_{0\alpha}, a''' \perp p'''_{0\alpha}$.

Возьмем произвольную плоскость $\alpha(h'_{0\alpha}, f''_{0\alpha})$ и восстановим к ней перпендикуляр АВ, пересекающий плоскость в точке В (рисунок 6.3). Проведем через эту точку горизонталь плоскости NC. Построим горизонтальные проекции $A'B'$ прямой и горизонтали $N'C'$.

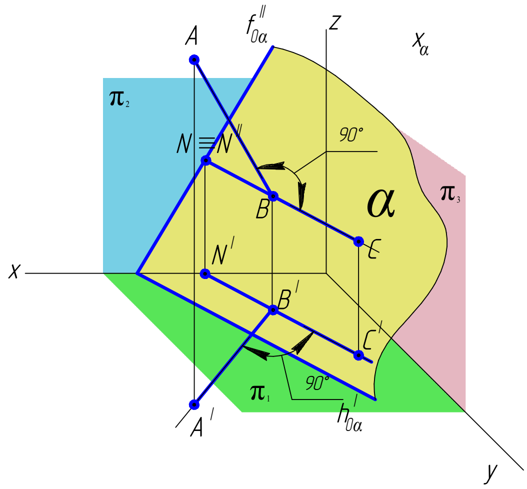


Рисунок 6.3 – Прямая, перпендикулярная плоскости

Если прямая перпендикулярна плоскости α, то она перпендикулярна и горизонтали $\mathrm{NC}(\mathrm{NC} \in \alpha)$, т.е. $\mathrm{AB} \perp \alpha \Rightarrow \mathrm{AB} \perp \mathrm{NC}$. Вместе с тем $NC \parallel N'C' \parallel h'_{0\alpha}$. Значит, в соответствии с теоремой о проекциях прямого угла (раздел 4.4), прямая AB перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали $N'C'$ и горизонтальному следу $h'_{0\alpha}$, т.е. $A'B' \perp h'_{0\alpha}$.

Аналогичными построениями можно доказать, что фронтальная и профильная проекции прямой перпендикулярны соответствующим следам плоскости. На эпюре (рисунок 6.4) это выглядит следующим образом: $A'B' \perp h'_{0\alpha}$; $A''B'' \perp f''_{0\alpha}$; $A'''B''' \perp p'''_{0\alpha}$

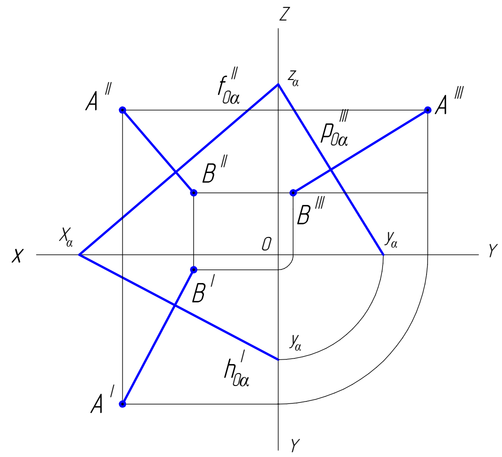


Рисунок 6.4 – Проекции прямой, перпендикулярной плоскости, заданной следами

Справедливо и другое утверждение: прямая AB перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым в этой плоскости. Если эти прямые расположены произвольно относительно плоскостей проекции, то прямые углы между заданной прямой и пересекающимися прямыми спроецируются на плоскости проекций с искажениями. Чтобы эти прямые углы спроецировались в натуральную величину, пересекающиеся прямые должны быть параллельны плоскостям проекции, т.е. является соответственно горизонталью и фронталью плоскости. На рисунке 6.5 представлен перпендикуляр $KA(K^{'}A^{'}, K''A'')$, восстановленный к плоскости $\Delta ABC(A'B'C', A''B''C'')$, т.е. $KA \perp \Delta ABC \Rightarrow K^{'}A^{'} \perp A^{'}D^{'};\ K''A'' \perp A''E''$, где $AD \equiv h$ и $AE \equiv f$.

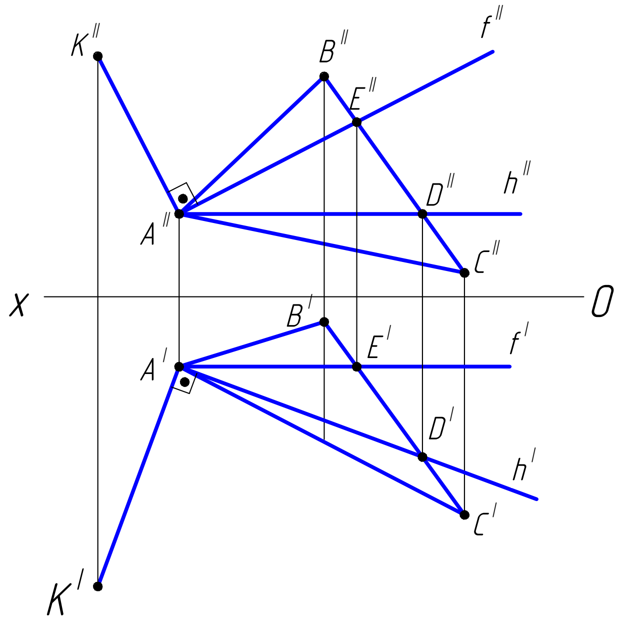


Рисунок 6.5 – Проекции прямой, перпендикулярной плоскости, заданной плоской фигурой

Таким образом, прямая перпендикулярна плоскости, если ее проекции перпендикулярны горизонтальной проекции горизонтали и фронтальной проекции фронтали соответственно и наоборот, т.е. $a \perp \alpha \Leftrightarrow a^{'} \perp h^{'}, a'' \perp f''$.

Если прямая пересекает плоскость под произвольным углом, то, как правило, решение задачи сводится к определению точки встречи прямой с указанной плоскостью. Алгоритм решения подобных задач будет рассмотрен в разделе 7.

7 Относительное положение плоскостей

Плоскости в пространстве могут быть параллельны друг другу, взаимно перпендикулярны и пересекаться под произвольным углом.

7.1 Параллельные плоскости

Известно, что две плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны соответственно двум пересекающимся прямым другой плоскости (рисунок 7.1).

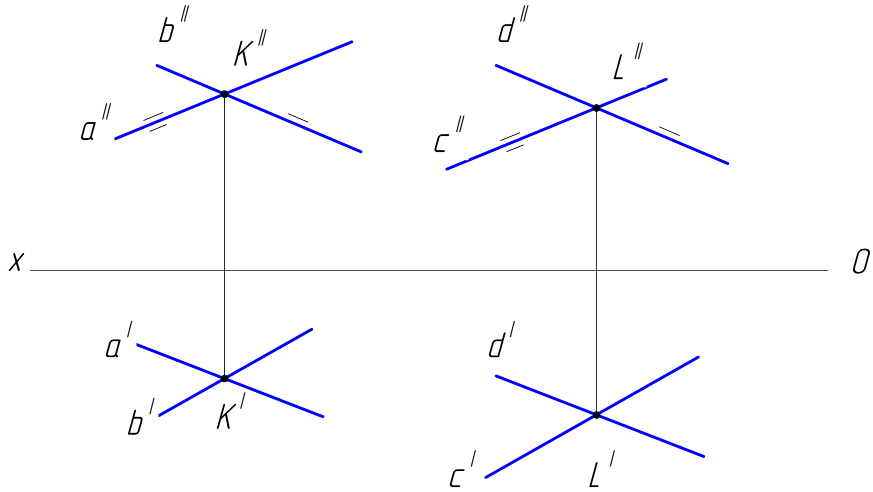
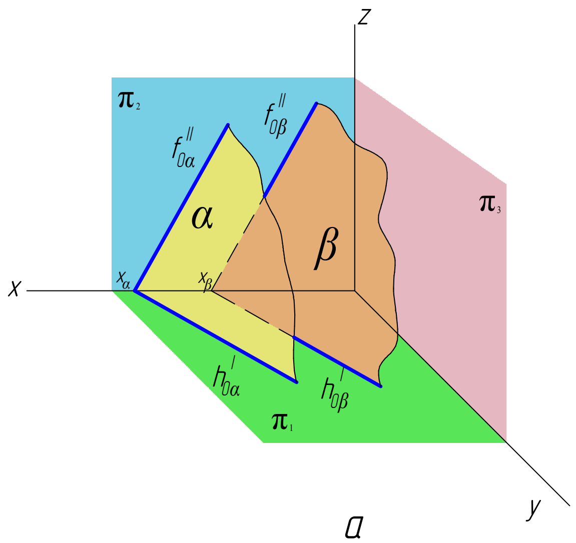
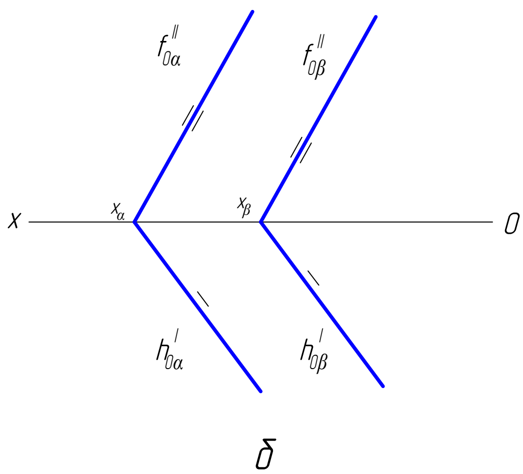


Рисунок 7.1 – Параллельные плоскости, заданные пересекающимися прямыми

Такими прямыми могут служить, например, следы обеих плоскостей. Если два пересекающихся следа одной плоскости параллельны одноименным следам другой плоскости, то плоскости параллельны между собой, т.е. $\alpha \parallel \beta \Longrightarrow h'_{0\alpha} \parallel h'_{0\beta},\ f''_{0\alpha} \parallel f''_{0\beta}$ (рисунок 7.2):





а – в аксонометрических осях б – в ортогональной системе координат

Рисунок 7.2 – Параллельные плоскости, заданные следами

Пример 7.1 Через заданную точку $A(A', A'')$ провести плоскость β, параллельную плоскости $\alpha(h'_{0\alpha}, f''_{0\alpha})$.

Направление следов искомой плоскости известно – они параллельны $h'_{0\alpha}$ и $f''_{0\alpha}$. Следовательно, для решения задачи достаточно найти точку, принадлежащую одному из следов плоскости β, т.е. найти след любой прямой, лежащей в искомой плоскости. Такой прямой может быть, например, горизонталь этой плоскости $h\left(h', h''\right)$ (рисунок 7.3):

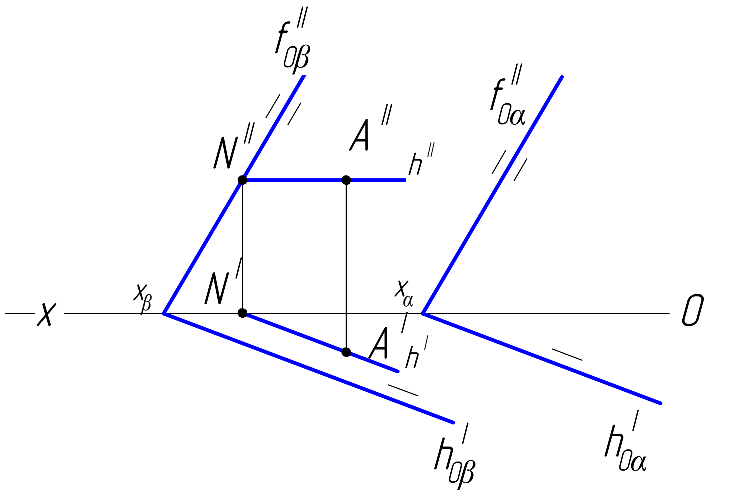


Рисунок 7.3 – Построение плоскости, параллельной заданной

Через точки A' и A'' строим проекции горизонтали $h' \parallel h'_{0\alpha}$ и $h'' \parallel 0X$. Отмечаем проекции фронтального следа горизонтали N' и N''. Проводим через точку N'' фронтальный след искомой плоскости -$f''_{0\beta} \parallel f''_{0\alpha}$. Горизонтальный след $h'_{0\beta}$ получим, проведя прямую через точку схода следов X_β параллельно следу $h'_{0\alpha}$.

7.2 Перпендикулярные плоскости

Две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через перпендикуляр к другой плоскости.

Ранее было установлено (раздел 6.2), что проекции прямой, перпендикулярной плоскости, перпендикулярны одноименным следам этой плоскости.

На рисунке 7.4 показана прямая $a(a'a'')$, перпендикулярная плоскости $\alpha(h'_{0\alpha}, f''_{0\alpha})$. Это вытекает из того, что $a' \perp h'_{0\alpha}$ и $a'' \perp f''_{0\alpha}$. Следовательно, любая плоскость, проходящая через прямую a, будет перпендикулярна плоскости α. На рисунке 7.4 изображена произвольная плоскость $\beta(h'_{0\beta}, f''_{0\beta})$, следы которой проходят через следы прямой a:

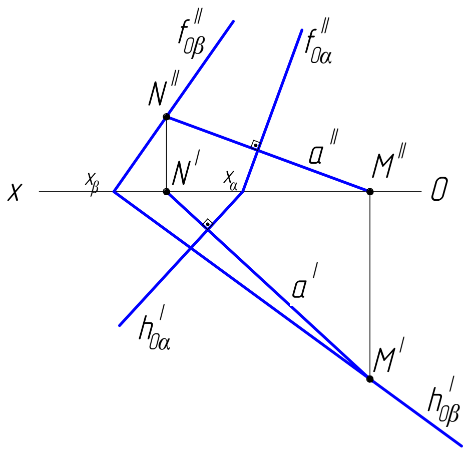


Рисунок 7.4 – Взаимно перпендикулярные плоскости

Рассмотрим пример построения плоскости, проходящей через произвольную прямую и перпендикулярную заданной плоскости.

Пример 7.2 Через прямую $AB(A^{'}B^{'}, A^{''}B^{''})$ провести плоскость $\beta(h^{'}_{0\beta}, f^{''}_{0\beta})$, перпендикулярную плоскости $\alpha(h^{'}_{0\alpha}, f^{''}_{0\alpha})$.

Плоскость β пройдет перпендикулярно плоскости α, если она будет содержать две пересекающиеся прямые: заданною прямую AB и перпендикуляр к плоскости α, восстановленный из произвольной точки этой прямой. Восстановим из точки B перпендикуляр BC к плоскости α, т.е. проведем $B'C' \perp h^{'}_{0\alpha}$ и $B''C'' \perp f''_{0\alpha}$ (рисунок 7.5):

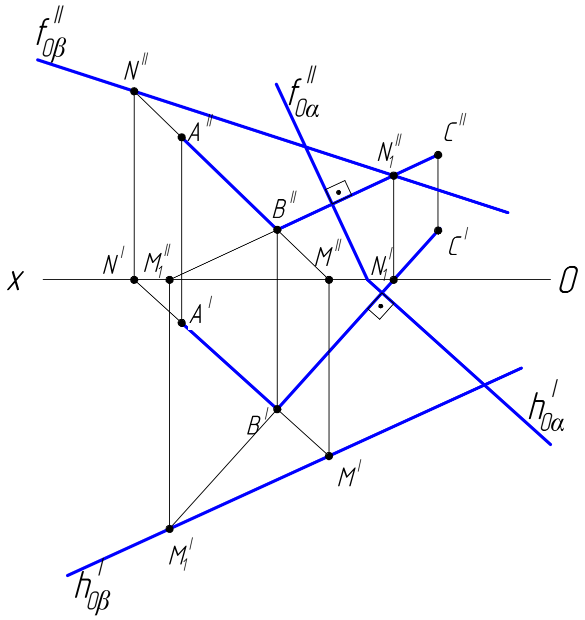


Рисунок 7.5 – Построение плоскости, перпендикулярной заданной плоскости

Определив проекции следов прямых AB и BC, можно будет построить следы плоскости β.

На пересечении $A'B'$с осью 0X отмечаем горизонтальную проекцию фронтального следа N'. Фронтальная проекция фронтального следа N'' находится в проекционной связи с N'на $A''B''$. Выполнив аналогичные построения для перпендикуляра $BC(B'C', B''C'')$, получим точку N_1''. Фронтальный след $f''_{0\beta}$ искомой плоскости пройдет через точки N''и N_1''.

Для построения горизонтального следа $h'_{0\beta}$ необходимо найти горизонтальные проекции горизонтальных следов прямых AB иBC.

На пересечении $A''B''$ с осью 0X отмечаем точку M''- фронтальную проекцию горизонтального следа. Горизонтальная проекция M' расположена в проекционной связи с M'' на $A'B'$. Аналогичными построениями для прямой $BC(B'C', B''C'')$ можно получить точку M_1'. Проведя прямую через M' и M_1', получим горизонтальный след $h'_{0\beta}$ искомой плоскости.

Если плоскость задана равнозначными геометрическими элементами или плоской фигурой, то проекции перпендикуляра к этой плоскости строят перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали h' и фронтальной проекции фронтали f'' этой плоскости.

Следует отметить, что в общем случае одноименные следы взаимно перпендикулярных плоскостей **не перпендикулярны** друг другу.

7.3 Пересечение плоскостей под произвольным углом

Известно, что линия пересечения двух плоскостей есть прямая, проходящая через две точки, каждая из которых принадлежит обеим плоскостям. Такими точками могут быть точки пересечения одноименных следов этих плоскостей. Таким образом, линия пересечения плоскостей проходит через точки пересечения их одноименных следов (рисунок 7.6)

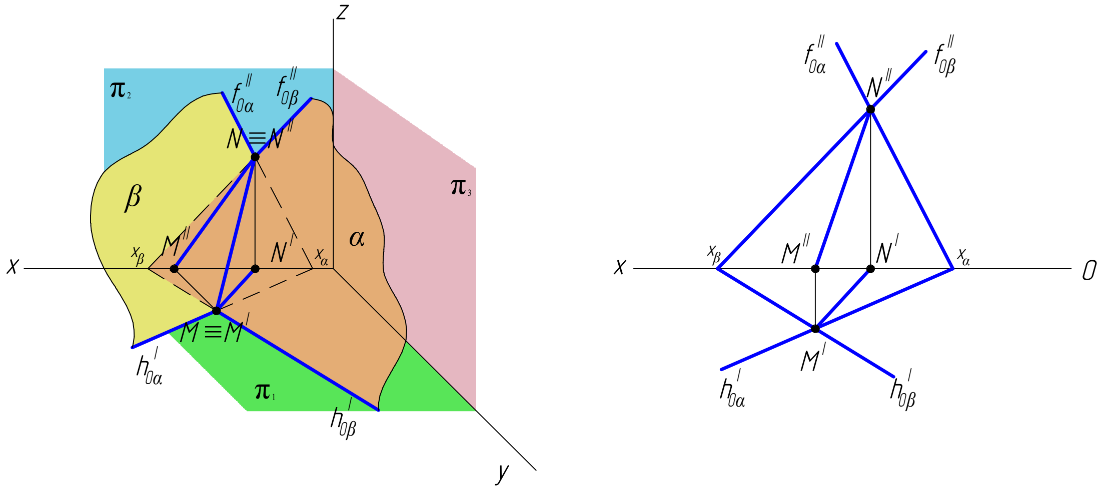


Рисунок 7.6 – Линия пересечения плоскостей общего положения, заданных следами

На данном рисунке $M'N'$ - горизонтальная проекция линии пересечения плоскостей α и β (ГПЛП$_{\alpha\beta}$), а $M''N''$- фронтальная проекция линии пересечения этих плоскостей (ФПЛП$_{\alpha\beta}$).

В общем случае плоскости, а следовательно, и их следы бесконечны. На рисунке 7.7 показано построение линии пересечения плоскостей для случая, когда одна точка пересечения следов расположена на плоскости π_1 между II и III октантами:

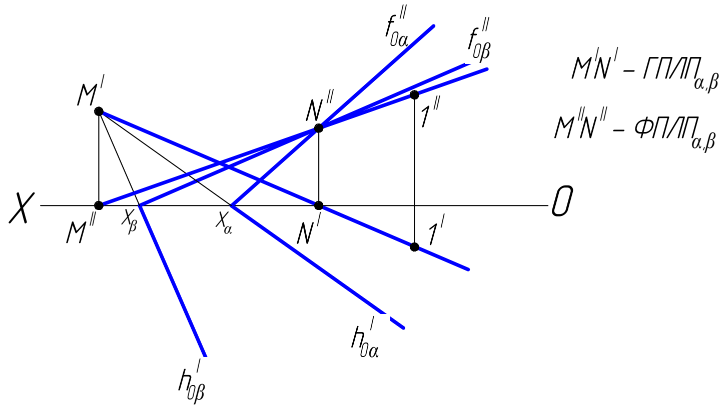


Рисунок 7.7 – Построение проекций линии пересечения плоскостей

Рассмотрим несколько частных случаев пересечения плоскостей. Пусть одна из пересекающихся плоскостей параллельна горизонтальной плоскости проекций $\pi_1\left(\beta \parallel \pi_1 \Longrightarrow f''_{0\beta} \parallel 0X\right)$ (рисунок 7.8)

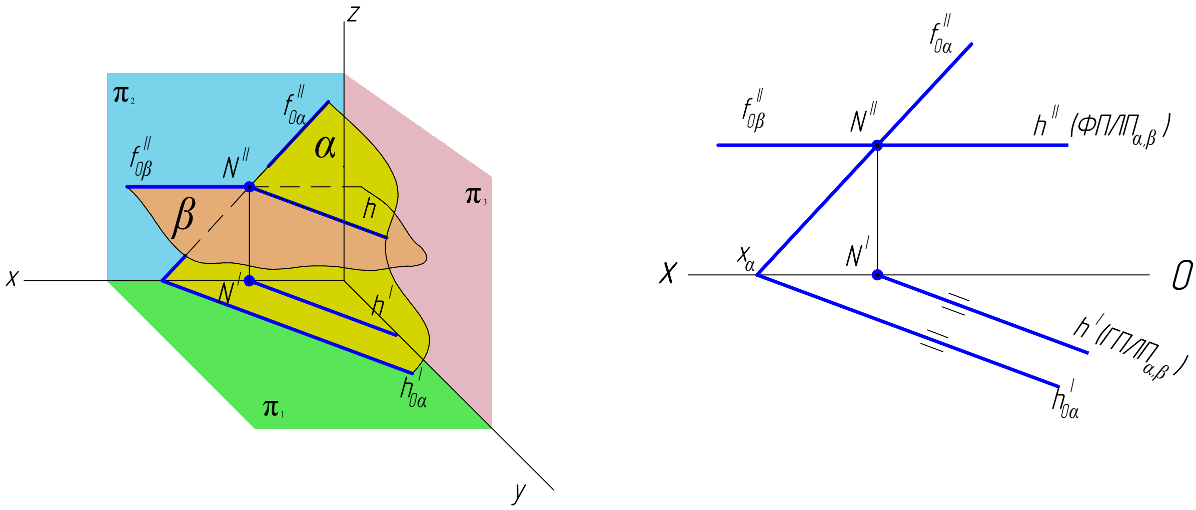


Рисунок 7.8 – Линия пересечения плоскостей при $\beta \parallel \pi_1$

Одна общая точка Nлинии пересечения плоскостей определяется пересечением фронтальных следов. Известно, что две параллельные плоскости (в нашем случае π_1 и β) пересекаются третьей (плоскостью α) по параллельным прямым. Следовательно, плоскости α и β будут пересекаться по общей горизонтали, т.е. h' – ГПЛП$_{\alpha,\beta}$ h'' – ФПЛП$_{\alpha,\beta}$.

Также по общей горизонтали пересекаются и плоскости, изображенные на рисунке 7.9. У этих плоскостей параллельны горизонтальные следы $\left(h'_{0\alpha} \parallel h'_{0\beta}\right)$.

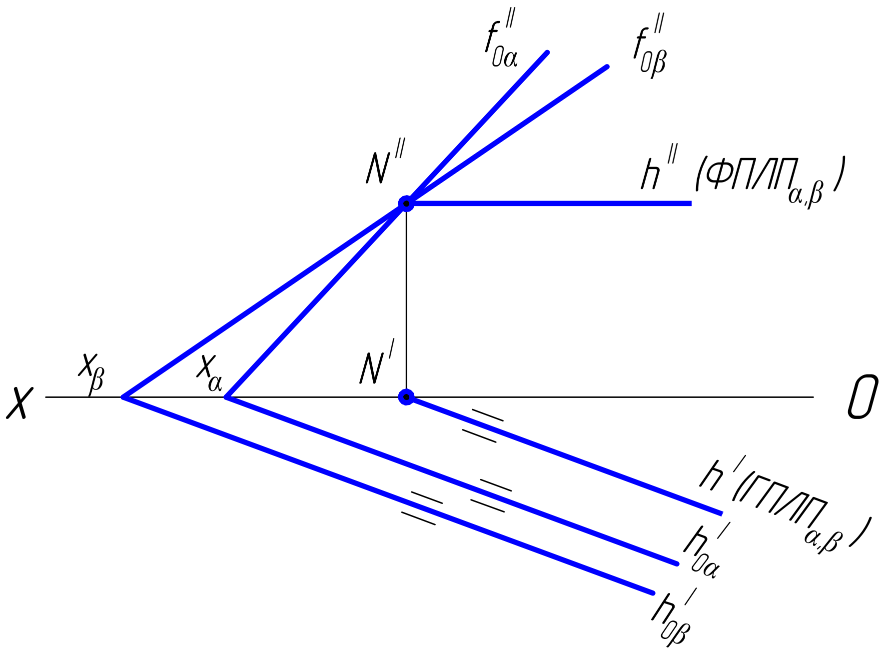


Рисунок 7.9 – Пересечение плоскостей с параллельными горизонтальными следами

В случае если одна из плоскостей параллельна фронтальной плоскости проекций π_2 $(\beta \parallel \pi_2 \Longrightarrow h'_{0\beta} \parallel 0X)$, то линией пересечения является общая для обеих плоскостей фронталь $f(f', f'')$ (рисунок 7.10)

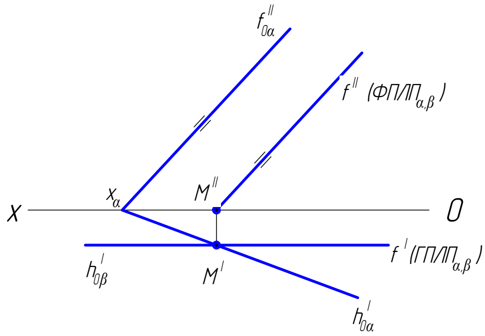


Рисунок 7.10 – Пересечение плоскостей для случая $\beta \parallel \pi_2$

Если у пересекающихся плоскостей параллельны фронтальные следы (рисунок 7.11), то линией их пересечения также будет общая фронталь.

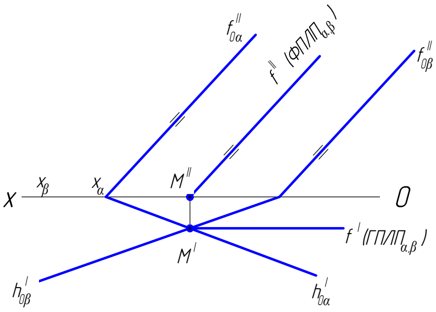
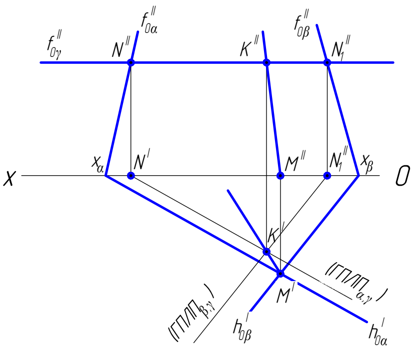


Рисунок 7.11 – Построение линии пересечения плоскостей для случая $f''_{0\alpha} \parallel f''_{0\beta}$

Рассмотрим случай, когда у двух плоскостей общего положения α и β хотя бы одна пара одноименных следов не пересекается в пределах чертежа (рисунок 7.12)

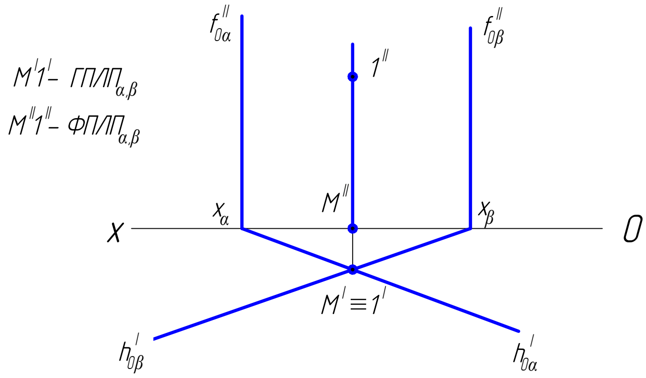


$$M'K' - \text{ГПЛП}_{\alpha,\beta}$$
$$M''K'' - \text{ФПЛП}_{\alpha,\beta}$$

Рисунок 7.12 – Построение линии пересечения плоскостейα и β, если их фронтальные проекции не пересекаются в пределах чертежа

Первая общая точка M для плоскостей α и β находятся в пересечении их горизонтальных следов $h'_{0\alpha}$ и $h'_{0\beta}$. Для нахождения второй точки следует провести вспомогательную плоскость, например, горизонтальную плоскость $\gamma f''_{0\gamma} \parallel 0X$ и построить линии пересечения двух пар плоскостей: α и γ, β и γ. Эти линии пересекутся в точке $K(K', K'')$, которая является общей для всех трех плоскостей. Линия пересечения плоскостей α и β пройдет через общие точки $M(M', M'')$ и $K(K', K'')$.

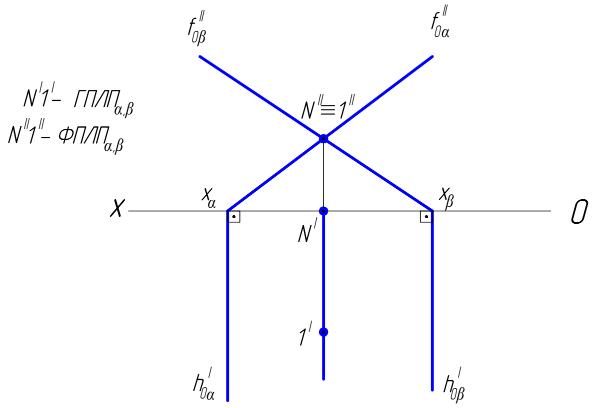
Следует отдельно, как частный случай, выделить пересечение двух проецирующих плоскостей. Например, линия пересечения двух горизонтально-проецирующих плоскостей α и β (рисунок 7.13), как линия пересечения этих плоскостей с плоскостью им перпендикулярной, перпендикулярна плоскости π_1. Горизонтальная проекция этой линии – точка, совпадающая с пересечением следов $h'_{0\alpha}$ и $h'_{0\beta}$, а фронтальная проекция есть перпендикуляр к оси 0X, восстановленный из точки M''.



$$\alpha \perp \pi_1, \beta \perp \pi_1 \Rightarrow M' \equiv 1', M''1'' \perp 0X$$

Рисунок 7.13 – Проекции линии пересечения двух горизонтально-проецирующих плоскостей

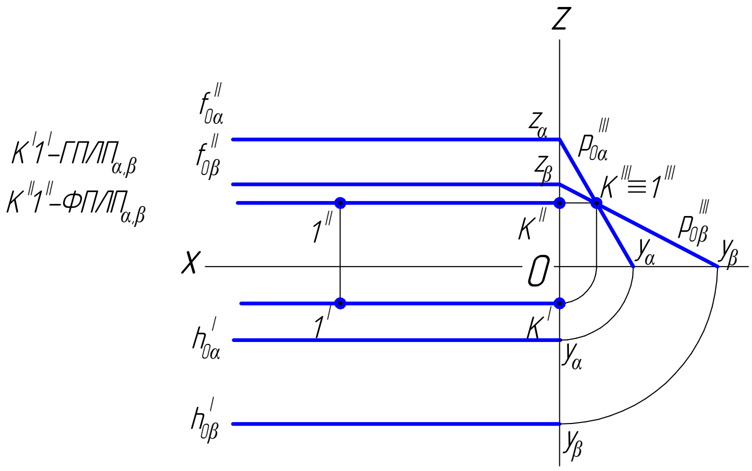
Аналогично проекции линии пересечения двух фронтально-проецирующих плоскостей представлены на рисунке 7.14



$$\alpha \perp \pi_2, \beta \perp \pi_2 \Rightarrow N'' \equiv 1'', N'1' \perp 0X$$

Рисунок 7.14 – Проекция линии пересечения двух фронтально-проецирующих плоскостей

На рисунке 7.15 изображены пересекающиеся профильно-проецирующие плоскости. На эпюре имеется одна общая точка K'''в пересечении профильных следов $P'''_{0\alpha}$ и $P'''_{0\beta}$. Поскольку точка $K \equiv K'''$принадлежит профильной плоскости проекций π_3, то ее горизонтальная проекция K' находится на оси 0Y, а фронтальная K''на оси 0Z. Линией пересечения α и β является профильно- проецирующая прямая. На плоскости π_3 она вырождается в точку, совпадающую с K'''. На плоскости π_2 ее фронтальная проекция параллельна оси 0X и проходит через точку K'',а на плоскости π_1 – линия, проходящая через K' также параллельно оси 0X.



$$\alpha \perp \pi_3, \beta \perp \pi_3 \Rightarrow K''' \equiv 1''', K'1' \parallel 0X, K''1'' \parallel 0X.$$

Рисунок 7.15 – Проекции линии пересечения двух профильно-проецирующих плоскостей

Если обе плоскости заданы геометрическими элементами, то для построения линии пересечения их рассекают двумя вспомогательными плоскостями, как правило, частного положения и строят проекции линии пересечения вспомогательных и заданных плоскостей. Затем проекции общих точек соединяют. На рисунке 7.16 построены проекции линии пересечения плоскостей, одна из которых задана треугольником $ABC(A'B'C', A''B''C'')$, а вторая двумя пересекающимися прямыми $EF(E'F', E''F'')$ и $HT(H'T', H''T'')$:

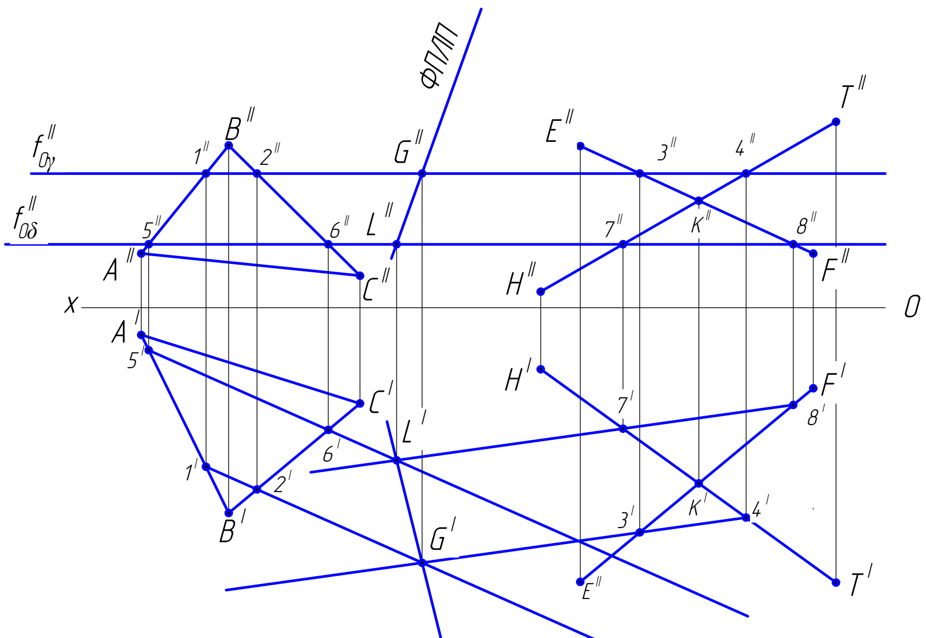


Рисунок 7.16 – Построение линии пересечения плоскостей, заданных геометрическими элементами

В данном случае через заданные плоскости проведены две горизонтальные плоскости γ и δ ($\gamma, \delta \parallel \pi_1 \Longrightarrow f''_{0\gamma} \parallel 0X, f''_{0\delta} \parallel 0X$). При пересечении заданных плоскостей с плоскостью γ образуются прямые $1-2(1''-2'', 1'-2')$ и $3-4(3''-4'', 3'-4')$, которые при своем пересечении дают точку $G(G', G'')$, принадлежащую всем трем плоскостям. Аналогично, при пересечении заданных плоскостей с плоскостью δ образуются прямые $5-6(5''-6'', 5'-6')$ и $7-8(7''-8, 7'-8')$. Они дают вторую общую точку $L(L', L'')$. Таким образом, прямая $GL(G'L', G''L'')$ является линией пресечения заданных плоскостей.

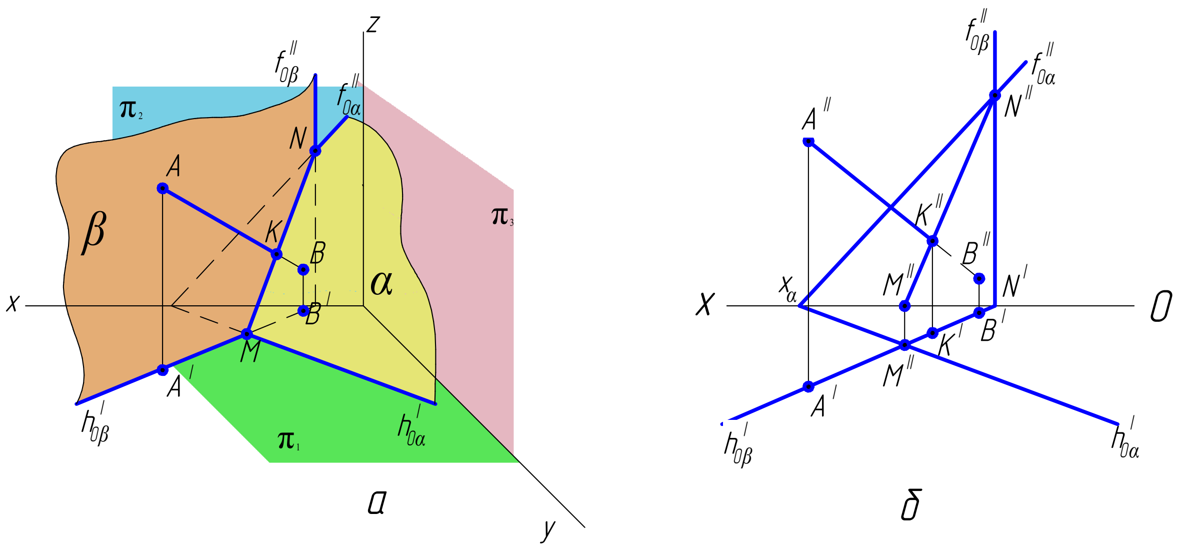
8 Пересечение прямой линии с плоскостью

Прямая, пересекающая плоскость, имеет с ней общую точку, называемую **точкой встречи**.

Общий алгоритм решения задач, по определению точки встречи прямой с плоскостью выглядит следующим образом:

- заданную прямую заключают во вспомогательную плоскость (как правило, проецирующую);
- строят линию пересечения заданной плоскости со вспомогательной;
- отмечают общую точку для заданной прямой и построенной линии пересечения плоскостей. Это и есть точка встречи прямой с заданной плоскостью;
- методом конкурирующих точек определяют видимость прямой относительно плоскости.

На рисунке 8 показано построение точки встречи прямой AB с плоскостью α:



а – в аксонометрических осях б – на эпюре

Рисунок 8 – Построение точки встречи прямой с плоскостью, заданной следами

Пусть даны косоугольная проекция плоскости $\alpha(f''_{0\alpha} \parallel h'_{0\alpha})$ и прямой $AB(A'B')$ (рисунок 8 а). Проводим через прямую AB горизонтально-проецирующую плоскость $\beta(h'_{0\beta}, f''_{0\beta})$. С учетом основного свойства проецирующих плоскостей (раздел 5.6) горизонтальный след $h'_{0\alpha}$этой плоскости пройдет через $A'B'$, а фронтальный $f''_{0\alpha}$-перпендикулярно оси 0X. Построим линию пересечения плоскостей α и β . Она пройдет через точки M и Nпересечения одноименных следов плоскостей. Изображение искомой точки K встречи прямой AB с плоскостью α найдем на пересечении заданной прямой AB и построенной линии пересечения MNплоскостей α и β.

В ортогональной системе координат построение точки встречи с плоскостью осуществляется в аналогичной последовательности (рисунок 8 б):

- прямую $AB(A'B', A''B'')$ заключаем в горизонтально-проецирующую плоскость $\beta(h'_{0\beta}, f''_{0\beta})$: $AB \in \beta, \beta \perp \pi_1 \Longrightarrow A'B' \equiv h'_{0\beta}, f''_{0\beta} \perp 0X$.

- строим проекции линии пересечения плоскостей α и β, проходящие через точки пересечения одноименных следов этих плоскостей: $N'' = f''_{0\alpha} \cap f''_{0\beta} \Longrightarrow N' \in 0X$; $M' = h'_{0\alpha} \cap h'_{0\beta} \Longrightarrow M'' \in 0X$.Таким образом $M'N' -$ ГПЛП$_{\alpha,\beta}$, $M''N'' -$ ФПЛП$_{\alpha,\beta}$.

- фронтальную проекцию K''точки встречи прямой AB с плоскостью α отметим в точке пересечения фронтальных проекций заданной прямой и построенной линии пересечения плоскостей ($K'' = A''B'' \cap M''N''$). Горизонтальная проекция K' находится в проекционной связи с K''на $A'B'$.

Рассмотрим случай пересечения прямой, перпендикулярной плоскости проекций с плоскостью общего положения. Пусть дана плоскость общего положения$\alpha(h'_{0\alpha}, f''_{0\alpha})$ и пересекающая ее прямая $AB(A'B', A''B'')$, перпендикулярная плоскости π_1(рисунок 8.1)

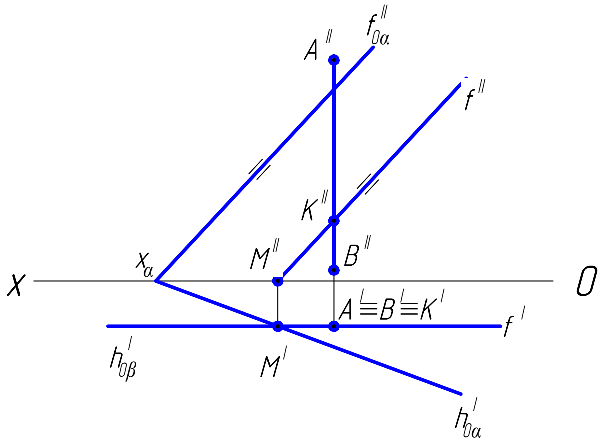


Рисунок 8.1 – Построение точки встречи проецирующей прямой с плоскостью общего положения

Любая прямая, проведенная через точку, в которую проецируется на плоскость π_1 заданная прямая, может быть принята за горизонтальный след горизонтально-проецирующей плоскости. Если такую линию провести параллельно оси 0X, то это будет горизонтальный след $h'_{0\beta}$ плоскости, параллельной плоскости π_2, т.е. дважды проецирующей плоскости β. В этом случае плоскости α и β пересекаются по общей фронтали (смотри раздел 7.3). Проекции K'и K'' искомой точки встречи прямой AB с плоскостью α отметим в точках пересечения соответствующих проекций заданной прямой и построенной фронтали.

Алгоритм нахождения точки встречи прямой с плоскостью сохраняется и в случае, если плоскость задана плоской фигурой или геометрическими элементами.

На рисунке 8.2 показано построение точки встречи прямой $FT(F'T', F''T'')$ с плоскостью треугольника $ABC(A'B'C', A''B''C'')$:

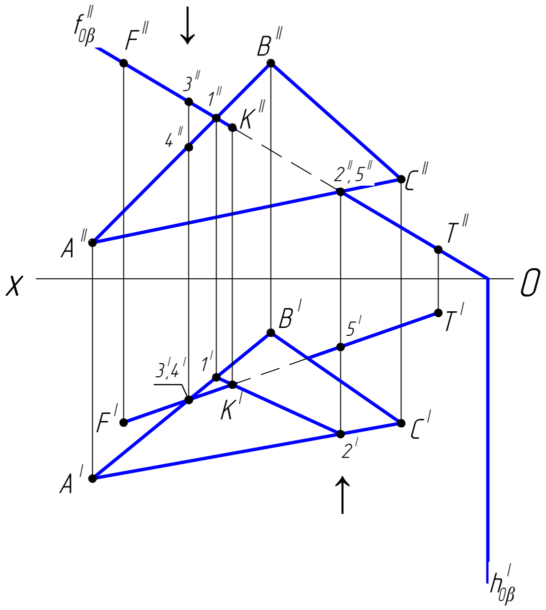


Рисунок 8.2 – Построение точки встречи прямой с плоскостью, заданной плоской фигурой

Проведем через прямую FT вспомогательную фронтально-проецирующую плоскость β ($FT \in \beta, \beta \perp \pi_2 \Longrightarrow F''T'' \equiv f''_{0\beta}, h'_{0\beta} \perp 0X$). Построим проекции линии пересечения заданной и вспомогательной плоскостей. Фронтальная проекция этой линии совпадает со следом $f''_{0\beta}$. Фронтальные проекции двух точек, принадлежащих линии пересечения указанных плоскостей, найдем, отметив точки $1''$и $2''$в пересечении следа $f''_{0\beta}$ с фронтальными проекциями $A''B''$ и $A''C''$ сторон треугольника. Точки $1'$и $2'$ расположены в проекционной связи на $A'B'$ и $A'C'$ соответственно. Соединив точки $1'$и $2'$, получим горизонтальную проекцию линии пересечения плоскостей β и ΔABC. Горизонтальную проекцию K' искомой точки встречи прямой FT с плоскостью треугольника ABC найдем в точке пересечения горизонтальных проекций $F'T'$ и $1'2'$. Фронтальная проекция точки встречи K'' расположена в проекционной связи на $F''T''$.

Следует отметить, что при пересечении прямой с плоскостью, видимость прямой относительно этой плоскости **обязательно** меняется в точке их встречи, т.к. плоскость считается не прозрачной.

Для определения взаимной видимости геометрических объектов используют метод конкурирующих точек.

Конкурирующими называются такие точки пространства, у которых совпадают какие-либо две одноименные проекции. На рисунке 8.3 показаны конкурирующие точки A и B(совпадают горизонтальные проекции, т.е. $A' \equiv B'$), а также Cи D (совпадают фронтальные проекции, т.е. $C'' \equiv D''$).

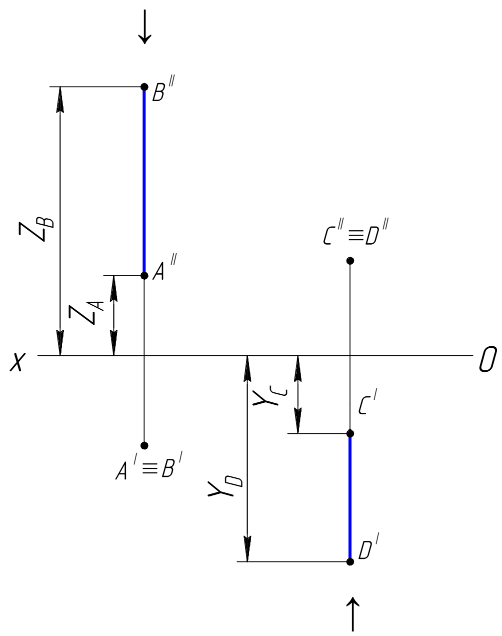


Рисунок 8.3 – Конкурирующие точки пространства.

Сущность метода конкурирующих точек заключается в определении взаимной видимости по их несовпадающим проекциям. Точка B находится выше точки A относительно плоскости $\pi_1(Z_B > Z_A)$. Поэтому на плоскости π_1 видна точка B', которая закрывает точкуA' (считается, что наблюдатель смотрит на плоскости проекций из бесконечности). На плоскости π_2 точка D'' закрывает точку C'', т.к. она находится ближе к наблюдателю, т.е. дальше от плоскости π_2 $(\mathrm{Y_D} > \mathrm{Y_C})$.

Вернемся к задаче, представленной на рисунке 8.2. Для определения видимости прямой $F'T'$ на горизонтальной плоскости проекций возьмем в качестве конкурирующих точки 3 и 4, горизонтальные проекции которых совпадают, т.е. $3' \equiv 4'$. Будем считать, что точка $3 \in FT$, а точка $4 \in \Delta ABC$. По направлению проецирующего луча точка $3''$ находится выше точки $4''$. Следовательно, на плоскости π_1 точка $3'$, принадлежащая $F'T'$, перекрывает точку $4'$, принадлежащую плоскости треугольника, т.е. видимой будет горизонтальная проекция отрезка $F'K'$, а $K'T'$ - невидима.

Видимость прямой на фронтальной плоскости проекций может быть определена с помощью конкурирующих точек 2 и 5 ($2'' \equiv 5''$). При этом пусть точка $2 \in \Delta ABC$, а точка $5 \in FT$. В этом случае точка $2''$, принадлежащая плоскости треугольника, перекрывает по направлению проецирующего луча точку $5''$, принадлежащую прямой. Следовательно, отрезок $K''T''$ находится под фронтальной проекцией треугольника $A''B''C''$. Видимым будет участок $F''T''$.

Литература

1. Гордон, В.О. Курс начертательной геометрии: учеб. пособие/ О.В.Гордон, М.А. Семенцов-Огиевский. – 27-е изд, стер. -М.: Высш. шк., 2008. -272с.

2. Елкин, В.В. Инженерная графика: учеб. пособие для студ. высш. учеб.заведений /В.В. Елкин, В.Т. Тозик. - М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 304 с. (ЭБ).

3. Талалай, П.Г. Начертательная геометрия. Инженерная графика. Интернет-тестирование базовых знаний: Учеб. пособие/ П.Г. ТалалайСПб.: Лань – 2010. – 256с.

4. Гнилуша, И.И. Алгоритмы решения типовых задач начертательной геометрии Часть 1,: учебное пособие/ И.И. Гнилуша, В.А. Люторович, Д.Л. Кириллов. – СПб.: издательство СПбГТИ(ТУ), 2016. - 72 с.

5. Тарасов, Б.Ф. Начертательная геометрия: учебник/ Б.Ф. Тарасов, Л.А. Дудкина, С.О. Немолотов. — СПб.: издательство «Лань», 2012. — 256 с.

Содержание

Кафедра инженерного проектирования

Учебное пособие

Начертательная геометрия

Готовимся к экзамену

Часть 1. Позиционные задачи.

Владимир Александрович Люторович

Екатерина Николаевна Булина

Отпечатано с оригинал- макета. Формат 60×90 $\frac{1}{8}$

Печ. л.8,0 Тираж экз. Заказ №

Санкт- Петербургский государственный технологический институт
(технический университет)

190013, Санкт-Петербург, Московский пр.,26
Типография издательства СПбТИ(ТУ) т.49-49-365