

Минобрнауки России

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Санкт-Петербургский государственный технологический институт
(технический университет)

Кафедра инженерного проектирования

И.И. Гнилуша, В.А. Люторович,
Д.Л. Кириллов

**АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ
ТИПОВЫХ ЗАДАЧ
НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ**

**Часть II. СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭПЮРА.
ПОВЕРХНОСТЬ**

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2016

УДК 331.875

Гнилуша, И.И. Алгоритмы решения типовых задач начертательной геометрии. Часть II. Способы преобразования эпюра. Поверхность: учебное пособие / И.И. Гнилуша, В.А. Люторович, Д.Л. Кириллов. – СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2016. – 70 с.

Рассмотрены принципы решения задач графическими методами курса начертательной геометрии. Приведены примеры оформления заданий, выполнение которых требуется для сдачи итогового экзамена.

Предназначено для студентов 1–5 факультетов и соответствует рабочим программам по дисциплине «Инженерная графика», раздел «Начертательная геометрия».

Учебное пособие предназначено для студентов I курса следующих направлений подготовки: 08.03.01, 09.03.01, 15.03.02, 15.03.04, 18.03.01, 18.03.02, 18.05.01, 18.05.02, 19.03.01, 20.03.01, 22.03.01, 27.03.04, 27.03.03.

Учебное пособие формирует у студентов следующие профессиональные компетенции (ПК):

- владение основными законами проецирования и построения изображений (ОПК-1);
- умение контролировать соответствие выполняемых работ нормативным документам (ОПК-3).

Рис. 47, библиогр. назв.4

- Рецензенты:
1. Балтийский государственный технический университет («Военмех»).
Д.Е. Тихонов-Бугров, канд. техн. наук, профессор, зав. кафедрой «Инженерная и машинная геометрия и графика».
 2. М.В. Александров, канд. техн. наук, доцент кафедры инженерного проектирования СПбГТИ(ТУ).

Полученные результаты были достигнуты в рамках государственного задания Минобрнауки России

Утверждено на заседании учебно-методической комиссии механического факультета 26 ноября 2015 г.

Рекомендовано к изданию РИС СПбГТИ(ТУ)

Введение

В пособии дается необходимая краткая теоретическая справка по вопросам курса начертательной геометрии. Основное его содержание составляют алгоритмы решения задач, входящих в альбомы домашних заданий, а также выносимых на контрольные мероприятия.

Во второй части пособия рассмотрены вопросы преобразования эпюра, построения поверхностей, определения линий их пересечения плоскостями и точек, получающихся при встрече прямой с поверхностью, а также некоторые метрические задачи. Также приводятся примеры нетиповых задач, требующих для решения комбинации описанных алгоритмов. Подобные задания встречаются в билетах на итоговом экзамене по курсу начертательной геометрии.

Каждый алгоритм в пособии снабжен графическими примерами, для которых приведен подробный разбор решения. Ряд иллюстраций предназначается в качестве образца оформления заданий, представляемых студентами на проверку.

В основном, настоящее пособие предназначено для студентов, обучающихся на 3 и 4 факультетах Технологического института. Им в ходе обучения понадобятся все алгоритмы, рассматриваемые в пособии. Часть материала подходит для студентов технологических специальностей. Он поможет им в решении четвертой и пятой обязательных задач раздела начертательной геометрии в объеме изучаемого ими курса инженерной графики.

18 Метод перемены плоскостей проекций

Среди способов преобразования проекций метод перемены плоскостей проекций (ППП) является наиболее применяемым из-за своей универсальности: он позволяет перевести геометрические элементы из общего положения в частное, что облегчает решение позиционных и метрических задач. Его суть состоит в сохранении одной из плоскостей проекций неизменной и в замене другой плоскости, находящейся под определенным углом к исходной.

18.1 Общие случаи применения метода ППП

18.1.1 Преобразование точки, прямой

Если необходимо перенести точку или отрезок прямой (две точки) в новую систему плоскостей проекций, следует действовать так:

18.1.1.1 Провести новую ось координат, подходящую для решения определенной задачи.

18.1.1.2 Вычертить линии проекционной связи от точек в неизменной плоскости проекции перпендикулярно новой координатной оси.

18.1.1.3 Отложить на линиях проекционной связи от новой координатной оси координаты точек в новой плоскости проекции с учетом знаков: они равны расстояниям точек от старой оси координат в плоскости проекций, подлежащей изменению.

18.1.1.4 Обозначить проекции точек на новую плоскость проекций.

Преобразование отрезка прямой методом ППП проиллюстрировано на рисунке 57, а.

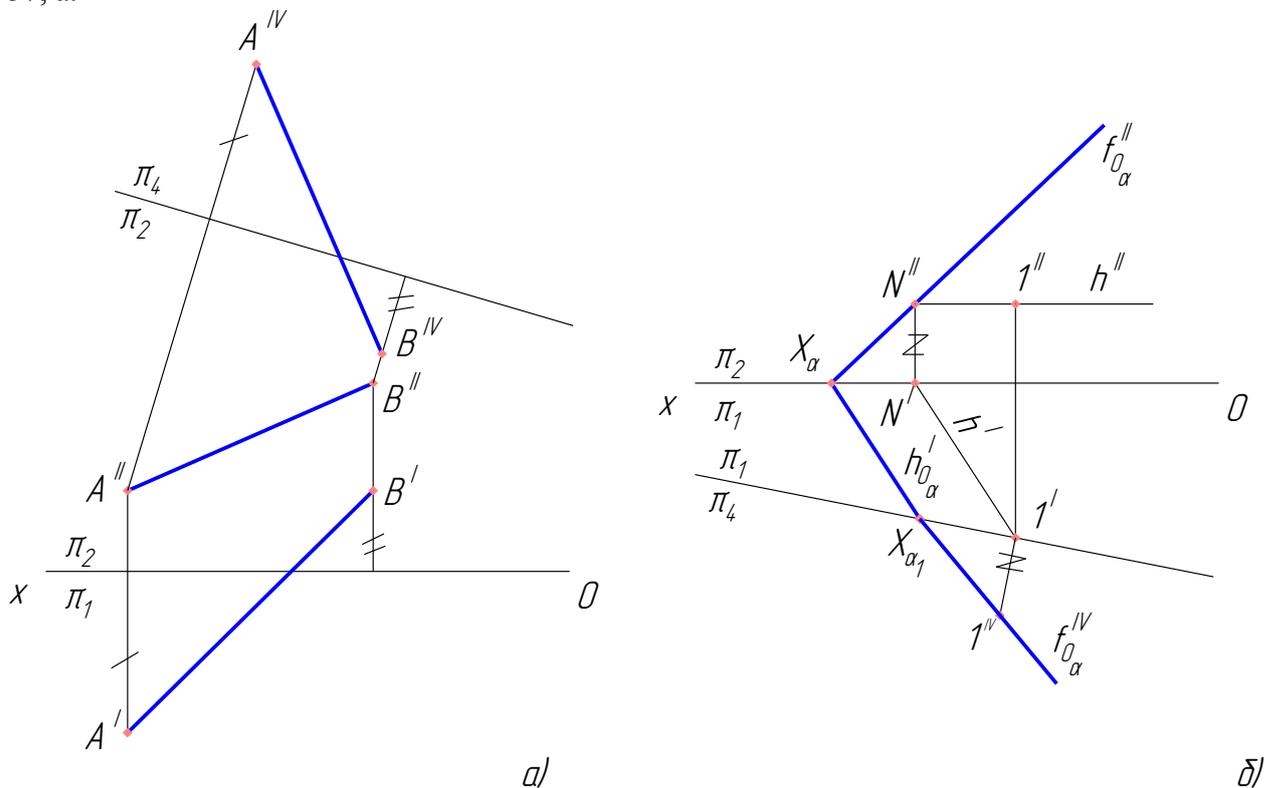


Рисунок 57 – Примеры применения метода ППП: а) преобразование отрезка прямой; б) преобразование плоскости

Пусть проекцию отрезка AB следует перенести в новую горизонтальную плоскость проекций π_4 . Опустим из точек A^{II} и B^{II} фронтальной проекции отрезка $A^{II}B^{II}$ перпендикуляры на

ось координат π_2/π_4 . Из оснований этих перпендикуляров откладываем координаты у концов отрезка AB , измеренные в старой системе плоскостей проекций – π_2/π_1 : расстояние от A^{IV} до оси π_2/π_4 равно расстоянию от A' до оси π_2/π_1 (Ox), а расстояние от B^{IV} до π_2/π_4 равно расстоянию от B' до π_2/π_1 , причем эти отрезки откладываются в разные стороны от π_2/π_4 , так как координаты концов отрезка имеют разные знаки. Отрезок $A^{IV}B^{IV}$ – новая горизонтальная проекция AB .

18.1.2 Преобразование плоскости, заданной следами

В некоторых случаях при решении задач плоскость общего положения необходимо перевести в иное общее положение в новой системе плоскостей проекций. Принято действовать следующим образом:

- 18.1.2.1 Провести новую ось координат, подходящую для решения определенной задачи.
- 18.1.2.2 Отметить пересечение следа плоскости в плоскости проекций, не подлежащей перемене, с новой координатной осью – это новая точка схода следов.
- 18.1.2.3 Вычертить произвольную линию частного положения в заданной плоскости, параллельную неизменяемой плоскости проекций (см. Алгоритм 11.1.2).
- 18.1.2.4 Найти пересечение проекции этой прямой в неизменяемой плоскости проекций с новой осью координат – это проекция следа данной прямой в новой плоскости проекций.
- 18.1.2.5 Найти проекцию полученной точки в исходной изменяемой плоскости проекций.
- 18.1.2.6 Перенести эту точку в новую плоскость проекций (см. Алгоритм 18.1.1) – она будет лежать на искомом следе плоскости.
- 18.1.2.7 Вычертить след заданной плоскости в новой плоскости проекций: он пройдет через точки, построенные в пп. 18.1.2.2 и 18.1.2.5.

Пусть необходимо построить след плоскости α (рисунок 57, б) на новой фронтальной плоскости проекций π_4 . Новая точка схода следов $X_{\alpha I}$ получается на пересечении следа h'_{α} с координатной осью π_1/π_4 . Из произвольной точки N'' на следе f''_{α} проведем фронтальную проекцию горизонтали плоскости α : она параллельна оси π_2/π_1 (Ox). Горизонтальная проекция этой горизонтали проходит от точки N' , лежащей на π_2/π_1 , параллельно следу h'_{α} . Эта проекция пересекает ось π_1/π_4 в точке I' . Ее фронтальная проекция I'' лежит на фронтальной проекции построенной горизонтали $N''I''$ в проекционной связи.

Ищем новую фронтальную проекцию точки I . На проекционном перпендикуляре к оси π_1/π_4 , восстановленном из горизонтальной проекции I' , откладываем неизменную координату z этой точки: расстояние от I^{IV} до I' равно расстоянию от I'' до оси π_2/π_1 .

Новый фронтальный след f^{IV}_{α} проходит из точки схода следов $X_{\alpha I}$ через построенную проекцию I^{IV} .

18.2 Перевод отрезка прямой в частное положение

18.2.1 Преобразование прямой общего положения в прямую, параллельную плоскости проекций

- 18.2.1.1 Провести новую координатную ось параллельно одной из проекций отрезка прямой.
- 18.2.1.2 Построить проекцию отрезка прямой в новой плоскости проекций согласно Алгоритму 18.1.1.

Для прямой AB на рисунке 58, а, новая ось координат π_2/π_4 была проведена параллельно фронтальной проекции $A''B''$. Таким образом, в новой системе плоскостей проекций π_2 и π_4 прямая AB становится горизонтальной. Опустим из концов отрезка $A''B''$ проекционные перпендикуляры на ось π_2/π_4 . Из их оснований на координатной оси отложим неизменные координаты у концов отрезка AB : расстояние от оси π_2/π_4 до точки A^{IV} равно расстоянию от π_2/π_4 до точки A' , а расстояние от π_2/π_4 до точки B^{IV} равно расстоянию от π_2/π_1 до точки B' , причем последний отрезок откладывается в отрицательном направлении подразумеваемой оси Oy . Соединим полученные точки – в новой плоскости проекций $A^{IV}B^{IV}$ является горизонтальной проекцией горизонтали, следовательно, отрезок проецируется в истинную величину.

18.2.2 Преобразование прямой в проецирующую

В проецирующее положение прямая переводится методом ППП из частного положения, когда прямая параллельна одной из плоскостей проекций:

18.2.2.1 Провести новую координатную ось перпендикулярно той проекции прямой, которая отображается в истинную величину.

18.2.2.2 Построить проекцию отрезка прямой в новой плоскости проекций согласно Алгоритму 18.1.1. Вся прямая спроецируется в одну точку.

Прямая CD на рисунке 58, б является фронтальной. Проведем новую координатную ось π_2/π_4 перпендикулярно фронтальной проекции отрезка прямой $C'D'$. При этом фронтальная плоскость проекций π_2 остается неизменной, а меняется горизонтальная плоскость проекций – на π_4 . Проекционный перпендикуляр на ось π_2/π_4 является продолжением проекции $C'D'$. На этой линии проекционной связи откладываем расстояние, равное удалению проекции $C'D'$ от оси π_2/π_1 . Отрезок прямой $C''D''$ проецируется в одну точку, следовательно, прямая CD перпендикулярна к плоскости проекций π_4 .

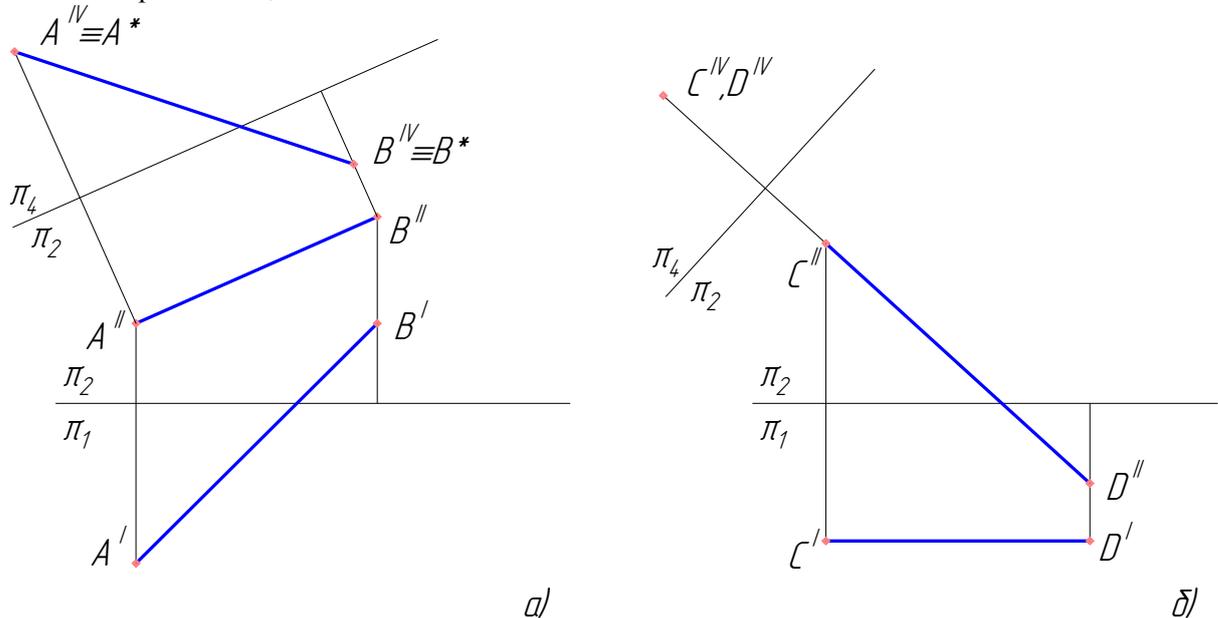


Рисунок 58 – Преобразование прямой методом ППП: а) из общего положения в прямую, параллельную плоскости проекций; б) в проецирующую прямую

Для того чтобы сделать проецирующей прямую общего положения, необходимо провести две перемены плоскостей проекций, последовательно применив Алгоритмы 18.1.1 и 18.2.2.

18.3 Перевод плоскости в частное положение

18.3.1 Преобразование плоскости общего положения в проецирующую

Если плоскость задана следами, то нужно действовать так:

18.3.1.1 Построить новую координатную ось под прямым углом к одному из следов плоскости. Отметить новую точку схода следов на пересечении этого следа с проведенной осью.

18.3.1.2 Выбрать произвольную точку на следе заданной плоскости в изменяемой плоскости проекций. Построить ее вторую проекцию.

18.3.1.3 Найти проекцию этой точки в новой плоскости проекций согласно Алгоритму 18.1.1.

18.3.1.4 Провести искомый след плоскости в новой плоскости проекций через новую точку схода следов (п. 18.3.1.1) и точку, построенную в п. 18.3.1.3.

На рисунке 59, а для преобразования плоскости α в проецирующую изменяем фронтальную плоскость проекций. Новую ось координат π_1/π_4 проводим перпендикулярно горизонтальному следу $h'_{0\alpha}$. На ее пересечении с упомянутым следом отмечаем точку схода следов $X_{\alpha 1}$. Выбираем произвольную точку N'' на фронтальном следе $f''_{0\alpha}$. Ее горизонтальная проекция N' лежит на оси π_2/π_1 .

Строим новую фронтальную проекцию точки N . Опускаем из N' проекционный перпендикуляр на ось π_1/π_4 и на его продолжении откладываем расстояние, равное $|N''N'|$. Получаем точку N^{IV} . Так как плоскость займет проецирующее положение, построенная точка будет лежать на следе плоскости.

Проводим новый фронтальный след $f^{IV}_{0\alpha}$ через $X_{\alpha 1}$ и N^{IV} . В системе плоскостей проекций π_1 и π_4 плоскость α – фронтально-проецирующая.

18.3.2 Преобразование плоскости в дважды проецирующую

В положение дважды проецирующей (плоскости уровня) плоскость переводится методом ППП из частного, проецирующего положения:

18.3.2.1 Провести новую ось координат параллельно проецирующему следу плоскости.

18.3.2.2 Построить новые проекции элементов, принадлежащих плоскости, согласно Алгоритму 18.1.1.

Очевидно, что из общего положения в положение, параллельное некоторой плоскости проекций, плоскость можно преобразовать, сделав две переменные плоскостей проекций, последовательно применив Алгоритмы 18.3.1 и 18.3.2.

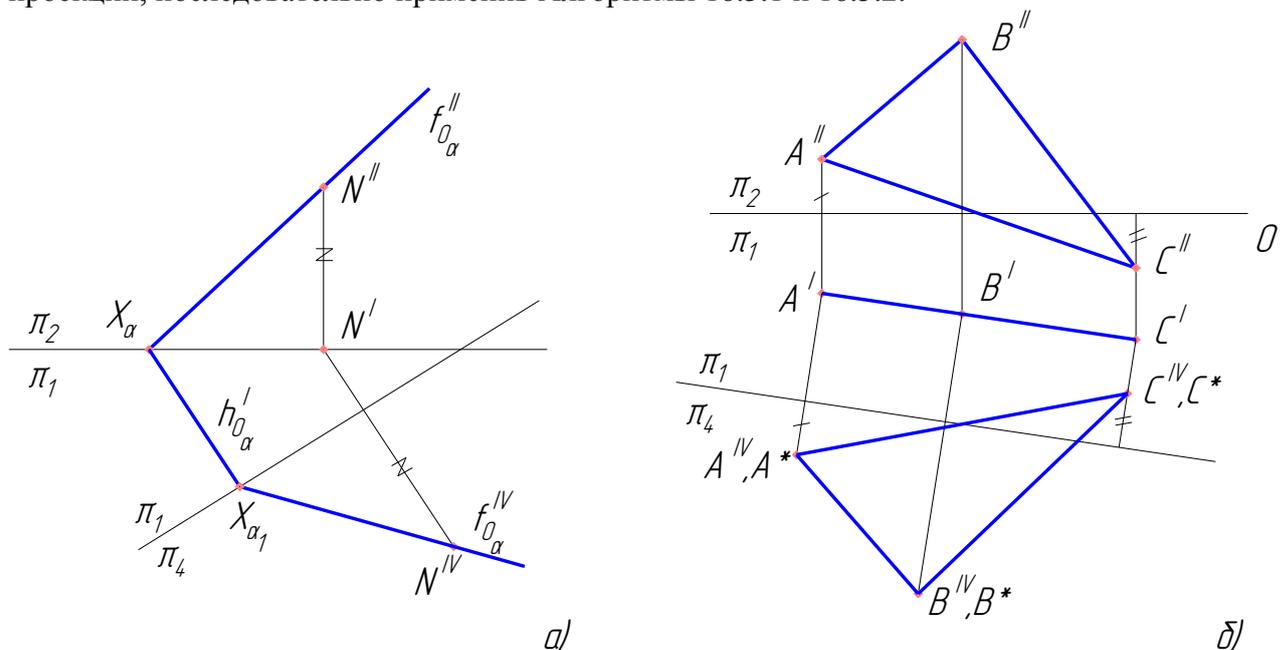


Рисунок 59 – Преобразование плоскости методом ППП: а) из общего положения в проецирующее; б) из проецирующего положения в плоскость уровня

На рисунке 59, б плоскость треугольника ABC занимает горизонтально проецирующее положение, так как $A'B'C'$ проецируется отрезком прямой. Проводим новую координатную ось π_1/π_4 параллельно проекции $A'B'C'$. Опускаем из точек A', B', C' проекционные перпендикуляры на ось π_1/π_4 . Откладываем от этой оси на соответствующие линии проекционной связи расстояния от точек A'', B'', C'' до оси π_2/π_1 с учетом знака координат. Соединяем полученные точки A^{IV}, B^{IV} и C^{IV} : построенный треугольник проецируется в натуральную величину $A^{IV}B^{IV}C^{IV} = A^*B^*C^*$.

18.4 Построение истинной величины плоской фигуры методом ППП

- 18.4.1 Определить направление одного из следов плоскости, заданной плоской фигурой. С этой целью построить фронталь или горизонталь плоскости (см. Алгоритм 11.2).
 18.4.2 Преобразовать плоскость в проецирующую (применить Алгоритм 18.3.1).
 18.4.3 Следующей переменной перевести плоскость в положение, параллельное новой плоскости проекций (применить Алгоритм 18.3.2).

Определение истинной величины фигуры методом перемены плоскостей проекций проиллюстрировано на рисунке 60.

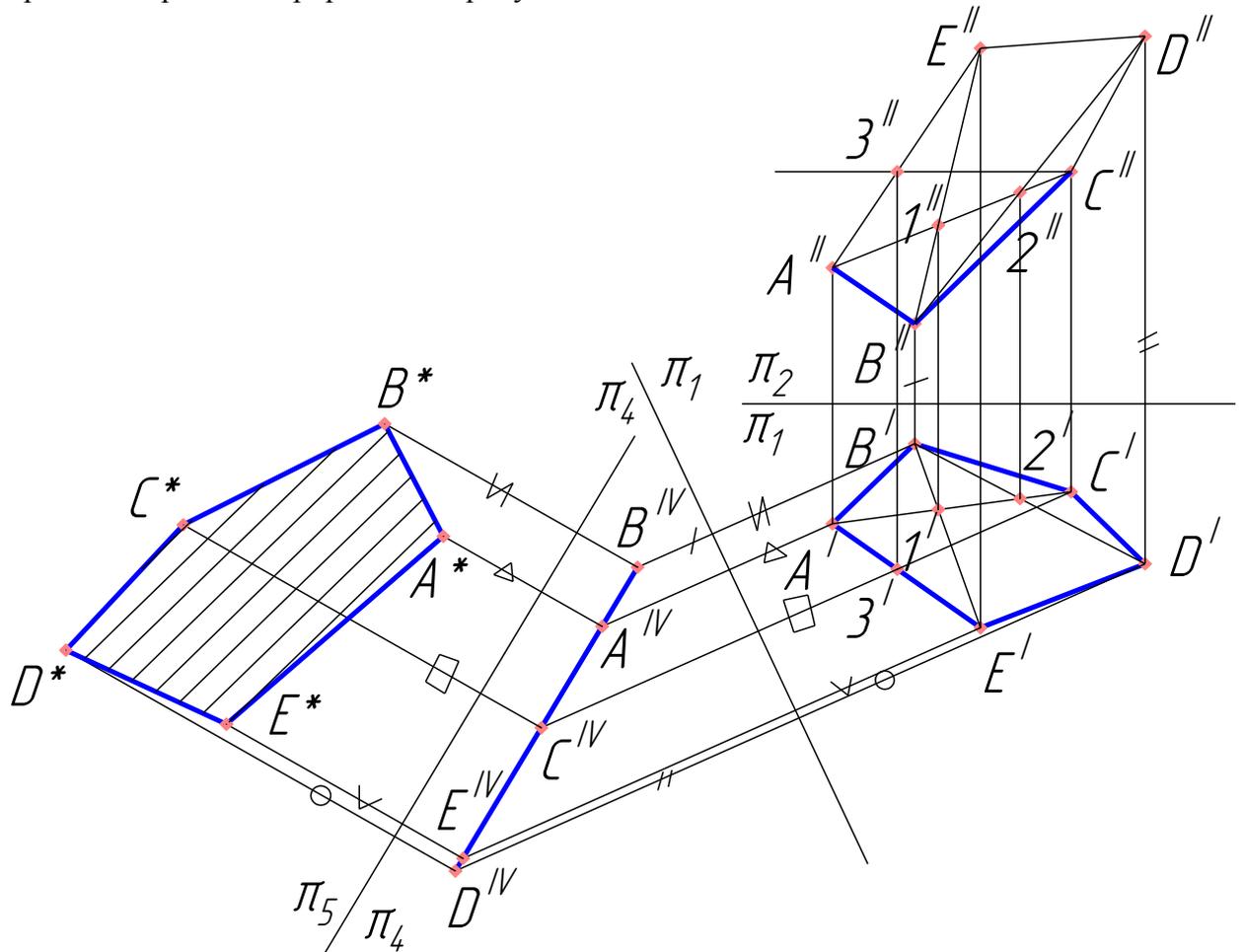


Рисунок 60 – Определение истинной величины плоской фигуры методом ППП

Фигура была задана горизонтальной проекцией $A'B'C'D'E'$ и двумя сторонами на фронтальной проекции – $A''B''$ и $B''C''$. Фронтальные проекции точек D'' и E'' были найдены за счет проведения диагоналей $A'C'$, $B'E'$ и $B'D'$ и построения их фронтальных проекций.

На фронтальной проекции пятиугольника была проведена фронтальная проекция горизонтали $C''3''$. Ее найденная в проекционной связи горизонтальная проекция $C'3'$ определяет направление горизонтального следа плоскости пятиугольника.

Проведем новую ось координат π_1/π_4 перпендикулярно направлению $C'3'$. Опустим на нее проекционные перпендикуляры из горизонтальных проекций вершин пятиугольника. На соответствующих линиях проекционной связи от оси π_1/π_4 отложим расстояния от точек A'', B'', C'', D'' и E'' до оси π_2/π_1 . Впрочем, достаточно отложить координаты только двух точек, остальные же должны лечь на отрезок прямой $B''D''$, в который на плоскость π_4 спроецируется весь пятиугольник, так как теперь он находится в проецирующем положении.

После того как плоскость пятиугольника заняла положение фронтально-проецирующей, ее можно преобразовать в плоскость уровня, т.е. сделать ее параллельной новой горизонтальной плоскости проекций.

Проведем ось координат π_4/π_5 параллельно прямой $B^{IV}D^{IV}$. Опустим на ось π_4/π_5 проекционные перпендикуляры из проекций вершин пятиугольника $A^{IV}, B^{IV}, C^{IV}, D^{IV}$ и E^{IV} . На продолжении соответствующих линий проекционной связи от оси π_4/π_5 отложим расстояния от горизонтальных проекций A', B', C', D' и E' до оси π_1/π_4 . Полученные в результате новые горизонтальные проекции в плоскости π_5 позволят вычертить пятиугольник $A^*B^*C^*D^*E^*$, проецирующийся в натуральную величину.

18.5 Решение позиционных задач методом ППП

18.5.1 Пересечение плоскостей

Ранее, в разделе 16, мы сталкивались с объемными построениями, связанными с определением линии пересечения плоскостей, по крайней мере, одна из которых задана плоской фигурой. Решение такого рода задач может быть упрощено преобразованием одной из плоскостей в проецирующую:

- 18.5.1.1 Выбрать в качестве базы для преобразований одну из плоскостей. Если она задана не следами, найти направление одного из следов плоскости путем построения линии частного положения плоскости (см. Алгоритм 11.2).
- 18.5.1.2 Преобразовать базовую плоскость в проецирующую (Алгоритм 18.3.1).
- 18.5.1.3 Перенести в новую плоскость проекций геометрические элементы второй плоскости (Алгоритм 18.1.1).
- 18.5.1.4 Обозначить в новой плоскости проекций отрезок линии пересечения плоскостей на следе плоскости, преобразованной в проецирующую.
- 18.5.1.5 Установить проекционные связи и перенести отрезок линии пересечения в исходные проекции.

На рисунке 61 выполнены построения для той же пары плоскостей, общий способ решения для которых приводился на рисунке 47, а. Это плоскость, заданная треугольником FRS , и плоскость, определяемая параллельными прямыми AB и CD .

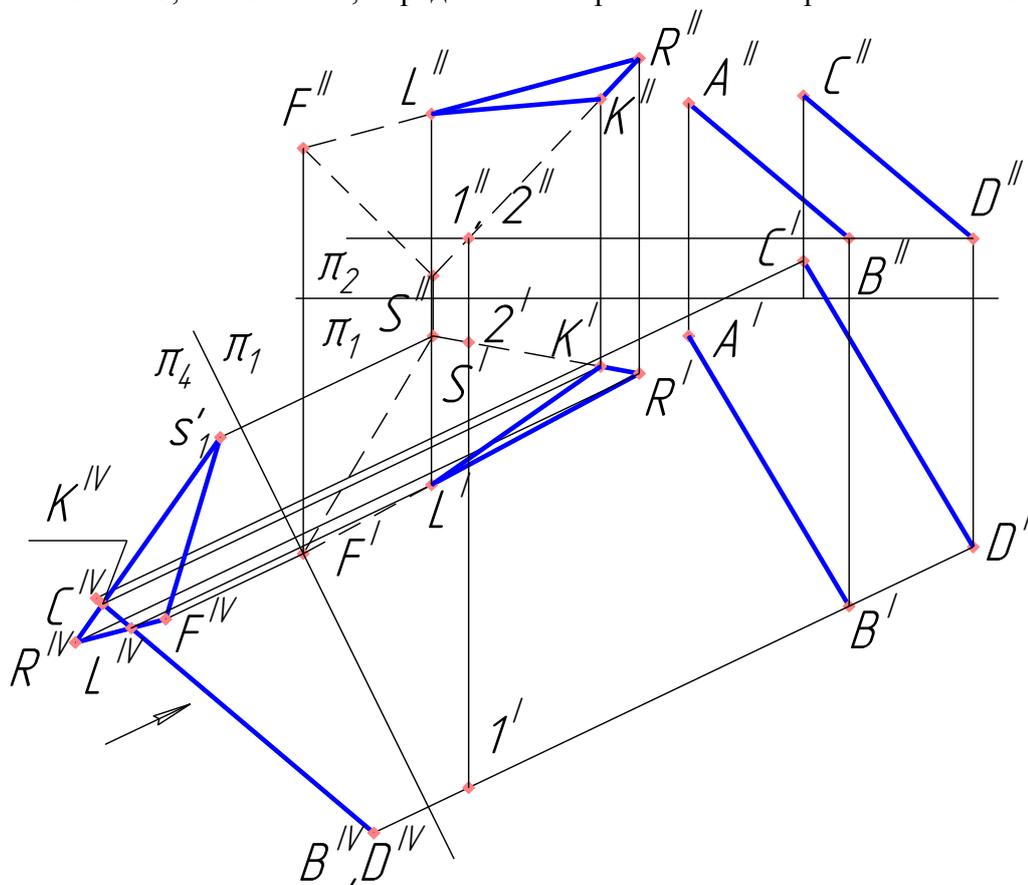


Рисунок 61 – Определение линии пересечения плоскостей методом ППП

В качестве базы для преобразований выберем плоскость, заданную параллельными прямыми AB и CD . Координаты z точек B и D одинаковы, этим можно воспользоваться при построениях: соединяем B'' и D'' , получаем фронтальную проекцию горизонтали плоскости. Горизонтальная проекция горизонтали $B'D'$ задает направление горизонтального следа. Новую ось координат π_1/π_4 проводим под прямым углом к этой линии.

Опускаем проекционные перпендикуляры на ось π_1/π_4 из точек B' и C' . На их продолжениях откладываем от оси π_1/π_4 те же расстояния, что и от точек B'' и C'' до оси π_1/π_2 , соответственно. Получаем новые фронтальные проекции B^{IV} и C^{IV} . Точка D на плоскость π_4 проецируется в ту же точку, что и B . Для определения A^{IV} построений не выполняем, так как она должна лечь на тот же отрезок $B^{IV}C^{IV}$, определяющий положение фронтального проецирующего следа плоскости.

За счет аналогичных построений проецируем на плоскость π_4 треугольник FRS . Получаем его новую фронтальную проекцию $F^{IV}R^{IV}S^{IV}$.

Проекция линии пересечения заданных плоскостей на π_4 совпадает со следом фронтально проецирующей плоскости. Отмечаем на пересечении $B^{IV}C^{IV}$ со сторонами $F^{IV}R^{IV}$ и $R^{IV}S^{IV}$ точки L^{IV} и K^{IV} . Отрезок $K^{IV}L^{IV}$ определяет фронтальную проекцию линии пересечения плоскостей на π_4 .

Проводим линии проекционной связи в плоскость π_1 под прямым углом к оси π_1/π_4 . Находим горизонтальную проекцию линии пересечения $K'L'$. Наконец, проведя линии проекционной связи под прямым углом к π_1/π_2 , определяем исходную фронтальную проекцию линии пересечения заданных плоскостей $K''L''$.

Определим видимость треугольника FSR относительно плоскости, которую определяют прямые AB и CD , на исходных плоскостях проекций. Видимость в плоскости π_1 может быть определена без вспомогательных построений. По направлению проецирования к плоскости π_1 (на рисунке 61 показано стрелкой) проекция R^{IV} находится перед отрезком прямой, в которую спроецировалась плоскость $ABCD$. Это значит, что точка R находится выше плоскости параллельных прямых, следовательно, та часть треугольника, которой она принадлежит, а именно $R'K'L'$, будет видна на плоскости проекций π_1 . Вторая часть треугольника, $S'K'L'F'$, перекрывается плоскостью параллельных прямых, поэтому отрезки сторон следует показать линией невидимого контура.

Для определения видимости на плоскости π_2 воспользуемся конкурирующими точками. Обозначим точки $1''$ и $2''$ в месте пересечения проекции прямой $B''D''$ со стороной $S''R''$. В проекционной связи в горизонтальной плоскости проекций укажем точку $1'$ на $B'D'$, а $2'$ на $S'R'$. Точка $1'$ находится дальше от оси π_1/π_2 , чем точка $2'$, т.е. находится ближе к наблюдателю. Плоскость, содержащая точку 1 , в том месте, где выбраны конкурирующие точки, закрывает объекты плоскости, содержащей точку 2 . Следовательно, $S''K''L''F''$ показываем линией невидимого контура, другая часть треугольника, $R''K''L''$, будет видна относительно плоскости параллельных прямых на фронтальной плоскости проекций π_2 .

18.5.2 Точка встречи прямой и плоскости

Вместо применения вспомогательной проецирующей плоскости и эта задача может быть решена путем преобразования заданной плоскости в проецирующую:

- 18.5.2.1 Если плоскость задана не следами, найти направление одного из следов плоскости, построив ее фронталь или горизонталь (см. Алгоритм 11.2).
- 18.5.2.2 Преобразовать плоскость в проецирующую (Алгоритм 18.3.1).
- 18.5.2.3 Перенести в новую плоскость проекций отрезок прямой (Алгоритм 18.1.1).
- 18.5.2.4 Обозначить в новой плоскости проекций точку встречи на пересечении проекции прямой с проецирующим следом плоскости.
- 18.5.2.5 Установить проекционные связи и перенести точку встречи в исходные проекции.

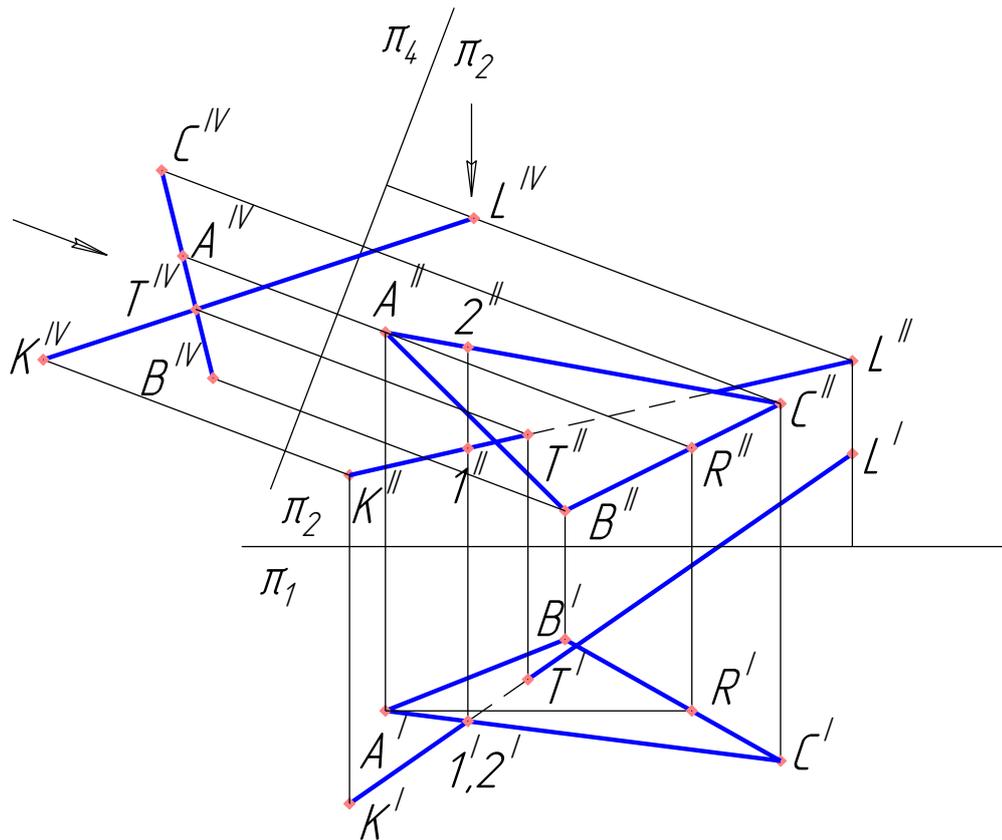


Рисунок 62 – Определение точки встречи прямой и плоскости методом ППП

В плоскости треугольника ABC (рисунок 62) построим фронталь: горизонтальная проекция $A'R'$ параллельна оси π_1/π_2 , построенная в проекционной связи фронтальная проекция $A''R''$ задает направление фронтального следа. Новую ось координат π_2/π_4 проводим перпендикулярно $A''R''$.

Опустим из вершин B'' и C'' проекционные перпендикуляры на ось π_2/π_4 и на их продолжении отложим соответствующие отрезки, равные расстояниям от B' и C' до оси π_1/π_2 . Новая горизонтальная проекция $B''''C''''$ определяет положение следа, проецирующего на плоскость π_4 . Точка A'''' может быть найдена на нем с помощью проекционной связи.

Новую горизонтальную проекцию отрезка прямой $K''''L''''$ находим путем аналогичных построений, причем расстояние от оси π_2/π_4 до точки L'''' откладываем в противоположном направлении, так как координата y точки L отрицательна.

В плоскости π_4 точка встречи T'''' определяется без дополнительных построений на пересечении отрезка $K''''L''''$ с проецирующим следом плоскости. На линии проекционной связи, перпендикулярной оси π_2/π_4 , находим фронтальную проекцию T'' , а опустив проекционный перпендикуляр на ось π_1/π_2 , устанавливаем положение горизонтальной проекции T' .

Видимость прямой KL относительно плоскости треугольника на плоскости π_2 может быть установлена без построений, за счет взаимного положения отрезков $B''''C''''$ и $K''''L''''$. Участок $T''''L''''$ перекрыт проецирующим следом плоскости, следовательно, на фронтальной плоскости проекций прямая закрыта треугольником от T'' до стороны треугольника $A''C''$.

Видимость на плоскости π_1 определяется обычным способом, с помощью конкурирующих точек 1 и 2 . Координата z точки $2''$ больше, чем у $1''$. Следовательно, в месте выбора конкурирующих точек плоскость перекрывает прямую – участок прямой $1'T'$ обозначен штриховой линией.

На рисунке 63 представлена задача из альбома домашних заданий для студентов, при решении которой, в зависимости от условия, используется Алгоритм 18.5.1 или 18.5.2.

Перв. примен.																																																						
Справ. №																																																						
Подп. и дата.	<p>Найти линию пересечения плоскостей методом перемены плоскостей проекций.</p>																																																					
Инв. № дубл.																																																						
Взам. инв. №	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 10%;"></td> </tr> <tr> <td>Изм.</td> <td>Лист</td> <td>№ докум.</td> <td>Подп.</td> <td>Дата</td> <td colspan="5"></td> </tr> <tr> <td>Разраб.</td> <td>Гнилицына</td> <td></td> <td></td> <td>05.05.03</td> <td colspan="5" rowspan="2" style="text-align: center; vertical-align: middle;"> <h2 style="margin: 0;">Задача 15</h2> <h3 style="margin: 0;">Вариант 31</h3> </td> </tr> <tr> <td>Пров.</td> <td>Кириллов</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Н.контр.</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td colspan="5" rowspan="2" style="text-align: center; vertical-align: middle;"> СПбГТИ(ТУ), группа 300 </td> </tr> <tr> <td>Утв.</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>														Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						Разраб.	Гнилицына			05.05.03	<h2 style="margin: 0;">Задача 15</h2> <h3 style="margin: 0;">Вариант 31</h3>					Пров.	Кириллов				Н.контр.					СПбГТИ(ТУ), группа 300					Утв.				
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата																																																		
Разраб.	Гнилицына			05.05.03	<h2 style="margin: 0;">Задача 15</h2> <h3 style="margin: 0;">Вариант 31</h3>																																																	
Пров.	Кириллов																																																					
Н.контр.					СПбГТИ(ТУ), группа 300																																																	
Утв.																																																						
Подп. и дата.	Копировал																																																					
Инв. № подл.					Формат А4																																																	

Рисунок 63 – Пример оформления задания, решенного по Алгоритму 18.5.1

19 Практические приложения метода совмещения

Рассматриваемый в этом разделе метод совмещения и описанный в следующем метод вращения относительно горизонтали (фронтали), по сути, являются вариантами одного и того же метода вращения. Метод совмещения рационально применять в случае задания плоскости следами. При этом осью вращения является один из следов заданной плоскости.

19.1 Основные компоненты метода совмещения

19.1.1 Построение следа плоскости в совмещенном положении

Как и в методе ППП, одна из плоскостей проекций (та, в которой лежит след-ось вращения) остается неизменной. Поэтому нам остается определить положение второго следа плоскости при его совмещении с плоскостью проекций.

- 19.1.1.1 Отметить произвольную точку на изменяемом следе плоскости. Ее следует взять на расстоянии не менее 15-20 мм от точки схода следов – это обеспечит достаточную точность построений.
- 19.1.1.2 Построить вторую проекцию этой точки на координатной оси.
- 19.1.1.3 Вычертить дугу окружности с центром в точке схода следов и радиусом, равным расстоянию от точки схода до выбранной точки на следе. Смысл этого построения состоит в том, что отрезки на следе плоскости видны в истинную величину, и их величина в результате совмещения сохранится.
- 19.1.1.4 Построить на этой дуге совмещенную проекцию точки на следе плоскости в проекционной связи с проекцией, лежащей на координатной оси. Проекционная связь в этом случае перпендикулярна неизменному следу плоскости – оси вращения.
- 19.1.1.5 Провести через эту точку и точку схода следов след плоскости в совмещенном положении.

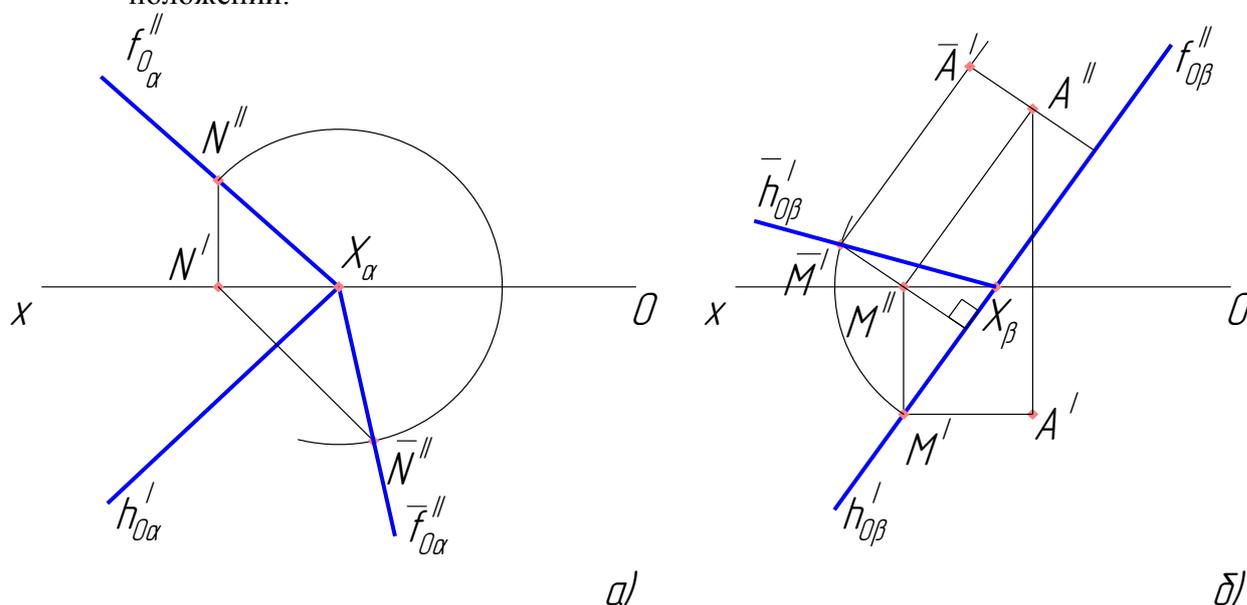


Рисунок 64 – Основные компоненты метода совмещения: а) построение следа плоскости в совмещенном положении; б) определение совмещенной проекции точки плоскости

Пусть плоскость α (рисунок 64, а) необходимо совместить с горизонтальной плоскостью проекций. Ее горизонтальный след $h'_{O\alpha}$ в этом случае является осью вращения. Выберем точку на

фронтальном следе – N'' . Ее горизонтальная проекция N' лежит на оси Ox . При совмещении истинные величины расстояний будут сохранены, поэтому строим дугу окружности с центром в X_α и радиусом, равным $|X_\alpha N''|$. На ней в проекционной связи с N' относительно следа $h'_{0\alpha}$ и будет лежать совмещенная проекция точки на следе \bar{N}'' . Через эту точку и X_α проводим след плоскости $f''_{0\alpha}$ в положении, совмещенном с горизонтальной плоскостью проекций.

19.1.2 Определение совмещенной проекции точки, лежащей в плоскости

Задание будет содержать только одну из проекций точки в плоскости. Следует действовать так:

- 19.1.2.1 Через заданную проекцию точки плоскости провести проекцию линии уровня, параллельную координатной оси. Отметить точку ее пересечения с одноименным следом плоскости.
- 19.1.2.2 Построить вторую проекцию точки на следе – она лежит на координатной оси. Через эту точку провести вторую проекцию линии уровня параллельно одноименному следу плоскости. Построить на ней в проекционной связи искомую проекцию заданной точки (Алгоритм 11.3).
- 19.1.2.3 Построить след заданной плоскости в совмещенном положении (Алгоритм 19.1.1). При этом можно воспользоваться точкой на следе, построенной в п. 19.1.2.1.
- 19.1.2.4 Построить проекцию линии уровня в совмещенном положении: она проходит через точку на следе в совмещенном положении параллельно неизменному следу плоскости.
- 19.1.2.5 Найти на совмещенной проекции линии уровня искомую совмещенную проекцию точки в проекционной связи с ее неизменной проекцией. Проекционная связь перпендикулярна неизменному следу плоскости – оси вращения.

Пусть заданы плоскость β со сливающимися следами и горизонтальная проекция A' точки, принадлежащей этой плоскости (рисунок 64, б). Необходимо построить проекцию этой точки в положении, совмещенном с фронтальной плоскостью проекций.

Найдем фронтальную проекцию A'' . Через A' проводим горизонтальную проекцию фронтали плоскости β , параллельную оси Ox . Она пересекает след $h'_{0\beta}$ в точке M' . Фронтальная проекция M'' лежит в проекционной связи на оси Ox . Фронтальная проекция фронтали проходит через M'' параллельно $f''_{0\beta}$. На ней и лежит A'' в проекционной связи с A' .

Для построения совмещенного с π_2 следа плоскости β воспользуемся построенной ранее точкой M . Построим дугу окружности с центром в точке схода следов X_β и радиусом, равным $|X_\beta M'|$. На ней будет лежать совмещенная проекция точки на следе M' в проекционной связи с M'' – проекционная связь в этом случае перпендикулярна оси вращения операции совмещения, т.е. следу $f''_{0\beta}$. Через X_β и M' проведем след плоскости $h'_{0\beta}$ в положении, совмещенном с фронтальной плоскостью проекций.

Фронталь MA , построенная нами ранее, остается в частном положении и после выполнения совмещения. Ее совмещенная горизонтальная проекция будет проходить через \bar{M}' параллельно $f''_{0\beta}$. На ней в проекционной связи с A'' и находим точку \bar{A}' – проекцию A в положении, совмещенном с плоскостью π_2 .

19.2 Определение истинной величины плоской фигуры путем совмещения с плоскостью проекций

19.2.1 Плоскость общего положения

Постановка задачи обычно выглядит так: заданы плоскость (следами) и одна из проекций фигуры, принадлежащей этой плоскости. Надо действовать следующим образом:

- 19.2.1.1 С помощью линий уровня плоскости построить вторую проекцию заданной плоской фигуры (Алгоритм 11.3 или пп. 19.1.2.1 и 19.1.2.2).

- 19.2.1.2 Выбрать, с какой плоскостью проекций будет произведено совмещение. Проекция плоской фигуры на эту плоскость проекций останется неизменной, а след заданной плоскости в этой плоскости проекций будет осью вращения. Элементы в другой плоскости проекций должны быть преобразованы.
- 19.2.1.3 Построить след плоскости в совмещенном положении (Алгоритм 19.1.1). При этом можно воспользоваться одной из точек на следе, построенной в п. 19.2.1.1.
- 19.2.1.4 Построить проекции вершин плоской фигуры в совмещенном положении (Алгоритм 19.1.2). При этом, как правило, используются те же линии уровня, которые позволили найти вторую проекцию заданной плоской фигуры в п. 19.2.1.1.
- 19.2.1.5 Соединить построенные вершины. В совмещенном положении плоская фигура имеет истинную величину.

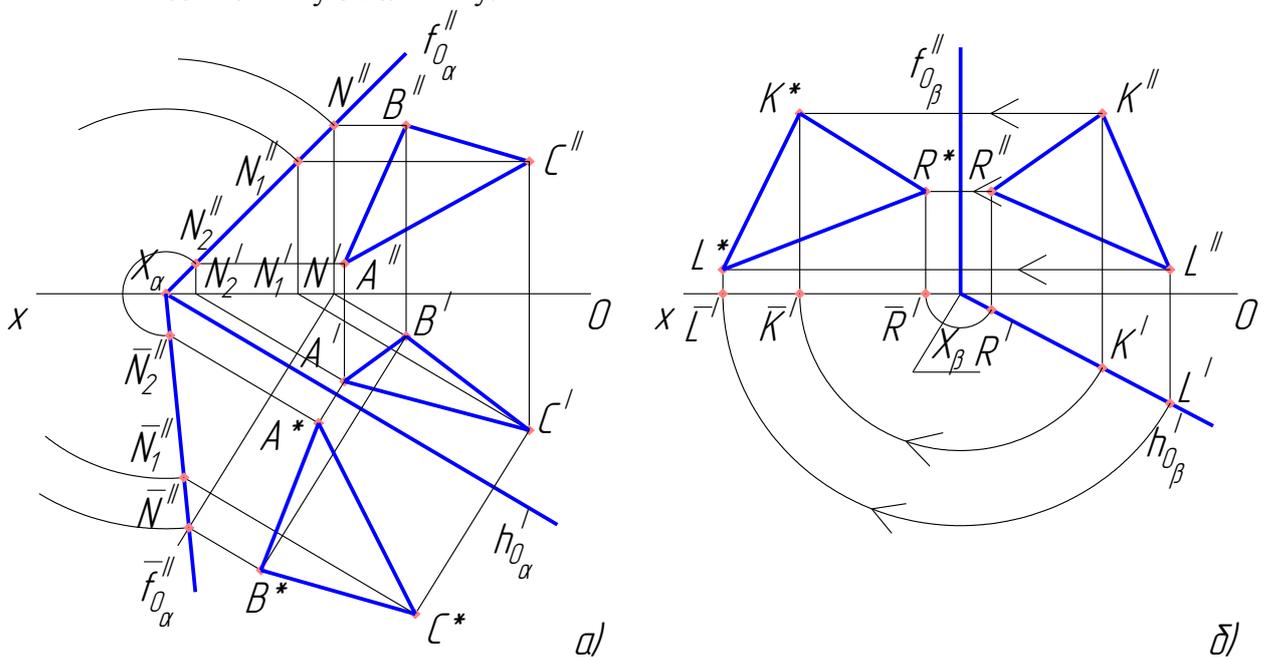


Рисунок 65 – Определение истинной величины плоской фигуры методом совмещения: а) в плоскости общего положения; б) в плоскости частного положения

Пусть заданы плоскость α и фронтальная проекция принадлежащего ей треугольника $A''B''C''$ (рисунок 65, а). Для того чтобы найти его горизонтальную проекцию, проведем через вершины фронтальные проекции горизонталей (параллельно оси Ox) до пересечения со следом $f''_{0\alpha}$. Прямая, проведенная через точку B'' , даст на следе точку N'' ; через C'' – точку N''_1 ; через A'' – точку N''_2 . Их горизонтальные проекции находим в проекционной связи на оси Ox . Горизонтальные проекции горизонталей проходят от полученных точек N'' , N''_1 и N''_2 параллельно горизонтальному следу $h'_{0\alpha}$. В проекционной связи на соответствующих ГПГ находим точки B' , C' и A' . Соединив их, получим горизонтальную проекцию треугольника.

Для построения следа $f''_{0\alpha}$ в положении, совмещенном с горизонтальной плоскостью проекций, воспользуемся одной из построенных точек на следе плоскости – точкой N'' . Построим дугу окружности с центром в точке схода следов X_α и радиусом, равным расстоянию от X_α до N'' . Вычертим линию проекционной связи с неизменной горизонтальной проекцией N' : она будет проходить перпендикулярно оси вращения, то есть следу $h'_{0\alpha}$. На пересечении дуги и проекционного перпендикуляра и будет лежать точка \bar{N}'' . Через нее и X_α построим фронтальный след плоскости в совмещенном положении $\bar{f}''_{0\alpha}$.

Вершины треугольника в совмещенном положении будем строить, используя уже вычерченные ранее горизонталы. Точка B лежит на горизонтали BN . Ее фронтальная проекция в

совмещенном положении будет проходить через точку \overline{N}'' параллельно следу h'_{0a} . На этой линии в проекционной связи с B' относительно h'_{0a} и будет находиться совмещенная фронтальная проекция B^* .

Находим совмещенное положение вершины C . Она лежит на горизонтали CN_1 . Точку \overline{N}''_1 на следе находим с помощью дуги радиусом $|X_a N''_1|$ с центром в X_a . (Можно было построить проекционную связь с N'_1 , перпендикулярную следу h'_{0a}). Фронтальная проекция горизонтали CN_1 в совмещенном положении идет через \overline{N}''_1 параллельно h'_{0a} . На ней в проекционной связи с C' лежит точка C^* .

Вершину A^* строим аналогично, используя горизонталь AN_2 .

Соединяем полученные вершины треугольника в совмещенном положении. $A^*B^*C^*$ – это истинная величина треугольника.

19.2.2 Плоскость частного положения

Если заданная плоскость занимает проецирующее положение, то объем необходимых построений сокращается. В этом случае не надо искать положение следа в совмещенном положении, так как известно, что он будет повернут до координатной оси. Причем, так как все элементы, лежащие в плоскости, проецируются на ее проецирующий след, то построения будут сходны с вращением отрезка относительно оси, перпендикулярной плоскости проекций (Алгоритм 7.1.4). Порядок решения выглядит следующим образом:

- 19.2.2.1 Построить вторую проекцию заданной плоской фигуры. Она будет лежать на проецирующем следе плоскости.
- 19.2.2.2 Проецирующий след плоскости будет изменяемым. Он поворачивается в положение, совпадающее с координатной осью. Второй след является осью вращения операции совмещения, причем эта ось перпендикулярна одной из плоскостей проекций.
- 19.2.2.3 Довернуть проекции вершин плоской фигуры до совмещения с координатной осью. В плоскости проекций, к которой перпендикулярна заданная плоскость, траектории их вращения будут отображаться в истинную величину – окружностями с центром в точке схода следов и радиусами от точки схода до соответствующих проекций точек на проецирующем следе.
- 19.2.2.4 Построить траектории вращения вершин плоской фигуры в другой плоскости проекций. Они будут отображаться отрезками прямых линий, параллельных координатной оси.
- 19.2.2.5 Найти проекции вершин плоской фигуры в совмещенном положении. Они будут лежать на отрезках прямых, построенных в п. 19.2.2.4, в проекционной связи с точками на координатной оси, найденными в п. 19.2.2.3.
- 19.2.2.6 Соединить построенные вершины. В совмещенном положении плоская фигура имеет истинную величину.

На рисунке 65, б треугольник KLR , лежащий в горизонтально проецирующей плоскости β , задан своей фронтальной проекцией $K''L''R''$. Горизонтальные проекции вершин треугольника лежат на следе $h'_{0\beta}$ в проекционной связи с соответствующими точками.

Для совмещения β с фронтальной плоскостью проекций доворачиваем след $h'_{0\beta}$ до совпадения с осью Ox . Лежащие на нем точки K', L', R' также перейдут на ось Ox в точки $\overline{K}', \overline{L}', \overline{R}'$ по дугам окружности с центром в точке X_β и радиусами, равными, соответственно, $|X_\beta K'|$, $|X_\beta L'|$ и $|X_\beta R'|$.

Во фронтальной плоскости проекций каждая из вершин будет двигаться по прямой, перпендикулярной оси вращения – следу $f'''_{0\beta}$. Совмещенные фронтальные проекции вершин K^*, L^*, R^* получим на этих проекциях траекторий в проекционной связи с $\overline{K}', \overline{L}', \overline{R}'$, соответственно.

Соединим K^*, L^* и R^* . Это – истинная величина заданного треугольника.

19.3 Построение плоской фигуры определенной величины в заданной плоскости

Эта задача является обратной рассмотренной в предыдущем подразделе. Заданы параметры плоской фигуры, которая может быть вычерчена в истинную величину в совмещенном положении плоскости, и ее необходимо перенести в заданные плоскости проекций. Кроме того, как правило, задают одну из проекций ключевых точек плоской фигуры.

- 19.3.1 С помощью линии уровня плоскости построить вторую проекцию заданной ключевой точки (Алгоритм 11.3 или пп. 19.1.2.1 и 19.1.2.2).
- 19.3.2 Выбрать, с какой плоскостью проекций будет произведено совмещение. Построить след плоскости в совмещенном положении (Алгоритм 19.1.1). При этом можно воспользоваться точкой на следе, построенной в п. 19.3.1.
- 19.3.3 Построить совмещенную проекцию ключевой точки плоской фигуры (Алгоритм 19.1.2).
- 19.3.4 От ключевой точки вычертить истинную величину плоской фигуры в совмещенном положении плоскости. Ее следует разместить так, чтобы свести к минимуму дальнейшие построения (например, если задан прямоугольник или параллелограмм, его можно расположить со сторонами, занимающими частное положение в плоскости).
- 19.3.5 Через вновь построенные вершины плоской фигуры провести линии уровня в совмещенном положении. Они должны быть параллельны следу плоскости, являющемуся осью вращения операции совмещения. Если задана плоская кривая, ее заменяют ломаной линией и проводят построения для узлов ломаной.
- 19.3.6 Отметить точки пересечения построенных проекций линий частного положения с совмещенным следом плоскости.
- 19.3.7 Вернуть построенные точки на совмещенном следе в исходные плоскости проекций. В изменяемой плоскости проекций они лежат на следе плоскости на том же расстоянии от точки схода следов, что и в совмещенном положении. В неизменной плоскости проекций они лежат на координатной оси.
- 19.3.8 Построить проекции линий частного положения в исходных плоскостях проекций. Они проходят в изменяемой плоскости проекций от точек на следах параллельно координатной оси, а в неизменной плоскости проекций – параллельно одноименному следу плоскости.
- 19.3.9 Используя проекционные связи, найти проекции вершин плоской фигуры на соответствующих проекциях линий частного положения.
- 19.3.10 Соблюдая один и тот же порядок, соединить вершины плоской фигуры в исходных плоскостях проекций.

Пусть необходимо в плоскости α построить квадрат со стороной, равной L (рисунок 66). Задана горизонтальная проекция одной из вершин квадрата – точка A .

Построим ее фронтальную проекцию. Проведем через A' горизонтальную проекцию фронтали плоскости. Она проходит параллельно оси Ox и пересекает след h'_{α} в точке M' . Фронтальная проекция M'' лежит в проекционной связи на оси Ox . Фронтальная проекция фронтали проходит через M'' параллельно f''_{α} . На этой ФПФ в проекционной связи с A' находим проекцию A'' .

Совместим плоскость α с фронтальной плоскостью проекций. Проведем дугу окружности с центром в точке X_{α} и радиусом, равным $|X_{\alpha}M'|$. Вычертим линию проекционной связи от M'' перпендикулярно к оси вращения – следу f''_{α} . На пересечении этих двух линий лежит проекция M' , совмещенная с плоскостью π_2 . Вычертим через X_{α} и M' след h'_{α} , совмещенный с фронтальной плоскостью проекций.

От точки M' параллельно следу f''_{α} проходит совмещенная горизонтальная проекция фронтали. На ней, в проекционной связи с A'' относительно f''_{α} , находим точку A^* , совмещенную с плоскостью π_2 .

19.4 Построение тела с основанием, лежащим в заданной плоскости

В решении этой задачи объединены уже изученные нами Алгоритмы:

- 19.4.1 Построить в заданной плоскости плоскую фигуру, которая является основанием тела (Алгоритм 19.3).
- 19.4.2 Из определенной точки построенной плоской фигуры (в зависимости от тела, из центра основания или из любой его вершины) восстановить перпендикуляр к плоскости, равный по длине заданной высоте тела (Алгоритм 14.1).
- 19.4.3 Закончить построение тела: если строится пирамида или конус, соединить вершину тела с вершинами основания; если изображается призма или цилиндр, провести параллельные построения для вычерчивания верхнего основания тела и прочертить ребра призмы или крайние видимые образующие цилиндра.

На рисунке 67 приведен пример оформления задания из домашнего альбома студентов, при решении которого используется Алгоритм 19.4.

Так как построения этого задания достаточно объемны, для лучшего понимания и чтения решения оно разбито на две части: первая иллюстрация показывает вычерчивание основания конуса, а вторая – получение собственно тела.

Итак, нам заданы плоскость α , фронтальная проекция центра основания тела C'' и основные параметры конуса (см. условие задания на рисунке 67). Используя горизонталь плоскости CN , находим горизонтальную проекцию центра основания конуса C' . Совмещаем плоскость α с горизонтальной плоскостью проекций: для этого используем построенную ранее точку N'' на фронтальном следе f''_{α} плоскости. Находим совмещенный фронтальный след плоскости f''_{α} . Совмещенная фронтальная проекция центра основания C^* лежит на совмещенной фронтальной проекции горизонтали C^*N'' , параллельной оси вращения операции совмещения – следу h'_{α} , в проекционной связи с горизонтальной проекцией C' .

Построим заданную окружность основания с центром в C^* . В исходных плоскостях проекций она будет проецироваться в эллипс. Для вычерчивания фронтальной и горизонтальной проекции основания конуса возьмем на совмещенной проекции 8 точек, они обозначены цифрами от 1^* до 8^* . Две из них: 4 и 5 , - принадлежат уже использовавшейся при построениях горизонтали CN . Еще две точки: 1 и 8 , - лежат на одной линии проекционной связи с центром. Точки $2, 3$ и $5, 6$ располагаются на горизонталях, лежащих на равном расстоянии от CN . Такой выбор точек позволяет сократить количество необходимых построений. Проведя совмещенные фронтальные проекции горизонталей плоскости α через точки $1^* - 8^*$, возвратим их в исходные плоскости проекций: точки на следе f''_{α} будут лежать на том же расстоянии от X_{α} , что и на следе f''_{α} ; фронтальные проекции горизонталей будут проходить параллельно оси Ox ; горизонтальные проекции горизонталей будут идти параллельно следу h'_{α} ; горизонтальные проекции точек $1' - 8'$ будут лежать на них в проекционной связи (относительно h'_{α}) с соответствующими совмещенными фронтальными проекциями $1^* - 8^*$; фронтальные проекции точек $1'' - 8''$ найдем в проекционной связи с их горизонтальными проекциями на соответствующих фронтальных проекциях горизонталей. Соединив соответствующие проекции точек лекальными кривыми, получим горизонтальную и фронтальную проекции основания конуса в заданной плоскости – **13578642**.

Переходим ко второй части задачи. Восстановим из точки C перпендикуляр к плоскости α произвольной высоты: его фронтальная проекция $C''K''$ перпендикулярна следу f''_{α} , а горизонтальная проекция $C'K'$ составляет прямой угол со следом h'_{α} . Для определения истинной длины этого отрезка перпендикуляра воспользуемся методом треугольника: выбрав в качестве базы для построения $C''K''$, отложим от точки K'' под прямым углом к отрезку разность ординат точек C и K (Δy). Полученная истинная длина отрезка перпендикуляра $C''K''$ задает прямую, на которой может быть отложена истинная длина высоты конуса. Откладываем ее от точки C'' , отмечаем точку S'' и возвращаем ее на продолжение фронтальной проекции $C''K''$ с помощью луча, параллельного $K''K''$. Горизонтальная проекция вершины конуса S' лежит на продолжении $C'K'$ в проекционной связи с точкой S'' .

Построение основания тела (обязательная часть задачи)

Построение поверхности (дополнительная часть задачи)

Построить проекции прямого кругового конуса с основанием, находящимся в заданной плоскости, если: C – центр основания тела; $R = 20$ мм – радиус основания; $h = 50$ мм – высота тела

Перв. примен.												
Справ. №												
Подп. и дата												
Взам. инв. №												
Инв. № дудл.												
Подп. и дата												
Инв. № подл.	Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	<h2 style="margin: 0;">Задача №12</h2> <h3 style="margin: 0;">Вариант 31</h3>						
	Разраб.	Гнилуша			20.10.15							
	Пров.	Лютарович										
	Н.контр.											
	Утв.					<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 33%;">Лит.</td> <td style="width: 33%;">Лист</td> <td style="width: 33%;">Листов</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">1</td> </tr> </table> <p style="text-align: center; margin-top: 5px;">СПбГТИ (ТУ), гр. 300</p>	Лит.	Лист	Листов			1
Лит.	Лист	Листов										
		1										

Копировал *Формат А4*

Рисунок 67 – Пример оформления задания, решенного по Алгоритму 19.4

Строим крайние образующие конуса. Для этого в каждой из проекций вычерчиваем из вершины касательные к эллипсу, в который спроецировалось основание конуса. Очерчиваем часть кривой основания линией невидимого контура (если с определением видимости возникают трудности, можно воспользоваться методом конкурирующих точек). Задача решена.

20 Использование метода вращения относительно горизонтали (фронталей) для определения истинной величины плоской фигуры

Этот вариант метода вращения схож с методом совмещения. Однако применяют его, когда следов плоскости не задано, т.е. не имеется очевидной оси вращения. В этом случае в качестве оси вращения выбирают одну из специально построенных линий уровня плоскости – горизонталь или фронталь.

20.1 Определение положения точки при вращении относительно горизонтали (фронталей)

Для того чтобы разобраться в основных компонентах метода вращения, рассмотрим случай, когда плоская фигура уже содержит ось вращения – горизонталь или фронталь. Нашей задачей является только определение положения одной из точек заданной плоскости, когда она станет параллельной плоскости проекций.

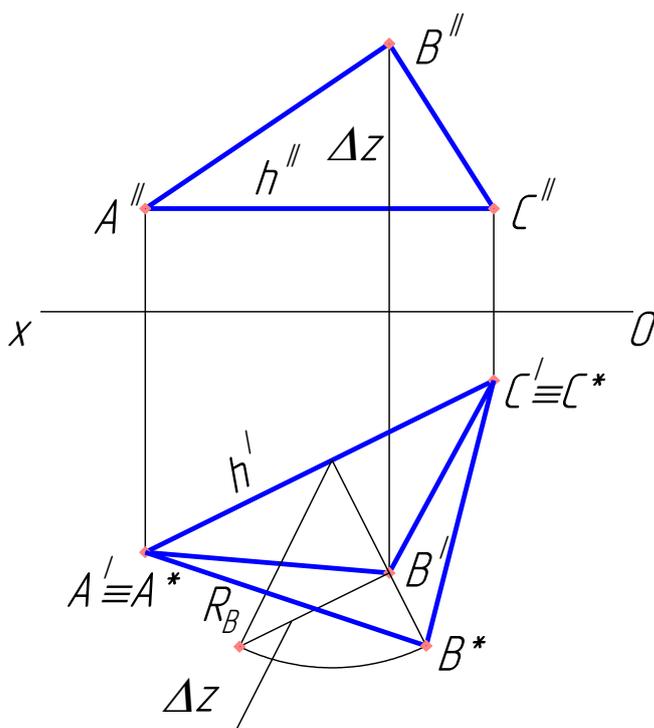


Рисунок 68 – Вращение точки относительно горизонтали плоскости

плоскости проекций, точка будет находиться на расстоянии от оси вращения, видимом в истинную длину. Перенести полученную истинную длину радиуса вращения на траекторию вращения – продолжение отрезка перпендикуляра, построенного в п. 20.1.2. Искомая точка найдена.

Рассмотрим плоскость, заданную треугольником, в которой одна из сторон является горизонталью (рисунок 68). Ее горизонтальная проекция $A'C'$ проецируется в истинную величину, поэтому основные построения выполняем в горизонтальной плоскости проекций. Опустим из точки B' перпендикуляр на $A'C'$. Как отмечалось выше, это – проекция радиуса вращения точки B

20.1.1 Основные построения проводятся в той плоскости проекций, которой параллельна ось вращения: если это горизонталь, то в горизонтальной; если фронталь, - то во фронтальной. Точки оси вращения не меняют своего положения.

20.1.2 Опустить из точки перпендикуляр на ось вращения. Это – проекция траектории вращения и радиуса окружности, по которой движется точка относительно оси вращения.

20.1.3 Определить истинную длину радиуса вращения точки, например, методом треугольника.

20.1.4 В положении, при котором плоскость, содержащая точку, будет параллельна

относительно AC . Строим истинную длину радиуса вращения методом треугольника: под прямым углом к отрезку перпендикуляра откладываем разность аппликат (Δz) точки B и оси вращения (точки A или C), измеренную во фронтальной плоскости проекций. Полученную истинную длину радиуса вращения R_B , переносим на продолжение отрезка перпендикуляра – траекторию вращения точки B . Это можно сделать, например, вычертив дугу окружности с центром в основании перпендикуляра на оси вращения и радиусом, равным R_B . Полученная точка B^* будет лежать в заданной плоскости при ее положении, параллельном горизонтальной плоскости проекций, причем треугольник $A^*B^*C^*$ виден в истинную величину.

20.2 Определение истинной величины плоской фигуры

- 20.2.1 Выбрать плоскость проекций, в которой будут выполняться основные построения, и вычертить ось вращения – горизонталь или фронталь плоскости, заданной фигурой. Рационально провести ее хотя бы через одну из вершин.
- 20.2.2 Повернуть плоскость до положения, параллельного плоскости проекций. Построения, изложенные в Алгоритме 20.1, можно выполнить для всех вершин, не лежащих на оси вращения, кроме одной.
- 20.2.3 Положение одной из вершин, принадлежащей отрезку, содержащему промежуточную точку на оси вращения, может быть найдено с учетом неизменности ее положения.
- 20.2.4 Соединить построенные вершины плоской фигуры в положении, параллельном плоскости проекций. Истинная величина построена.

На рисунке 69 построена истинная величина той же плоской фигуры, что и на рисунке 60 при использовании метода перемены плоскостей проекций.

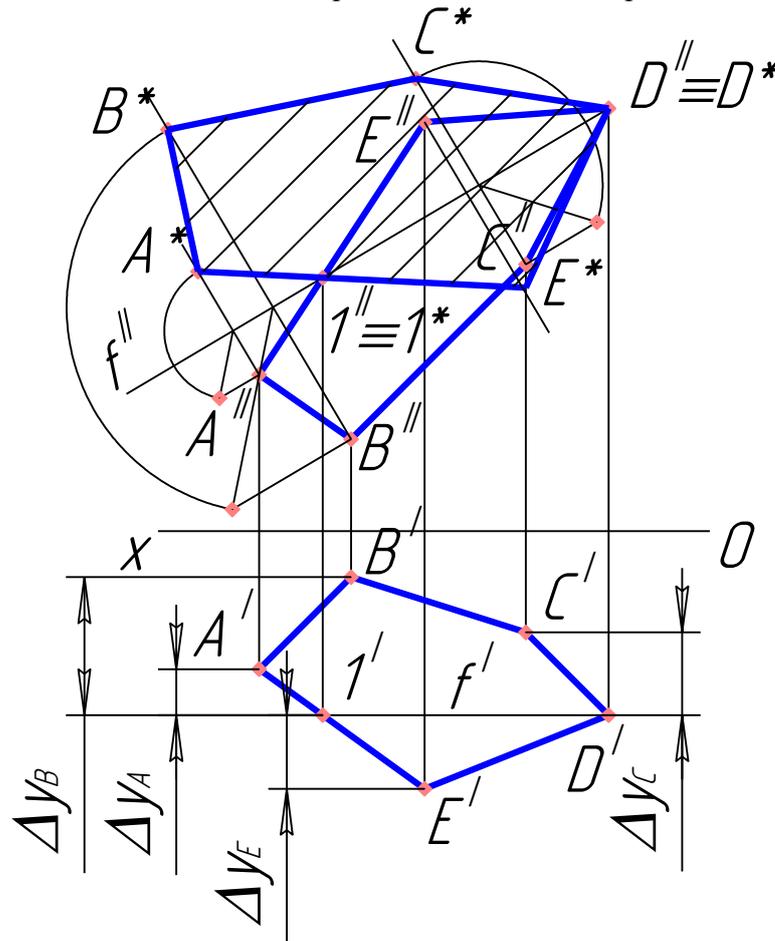


Рисунок 69 – Построение истинной величины плоской фигуры методом вращения относительно фронтали

Для определения истинной величины пятиугольника $ABCDE$ (рисунок 69) в качестве оси вращения используем фронталь DI , поэтому основные построения будут проведены на фронтальной плоскости проекций. Горизонтальная проекция фронтали $D'I'$ параллельна оси Ox , построенная в проекционной связи $D''I''$ определяет направление оси вращения.

Опустим из A'' перпендикуляр на $D''I''$. Это – проекция радиуса вращения точки A . Построим его истинную величину методом треугольника: к фронтальной проекции радиуса вращения под прямым углом построим разность ординат Δu_A , измеренную в горизонтальной плоскости проекций. Полученную истинную величину радиуса вращения переносим на продолжение перпендикуляра, опущенного из A'' . Для удобства чтения чертежа находим точку A^* с другой стороны от оси вращения по отношению к A'' . Аналогичным образом получаем точки B^* и C^* .

Точка E принадлежит отрезку AE , содержащему точку I на оси вращения. Поэтому точка E^* может быть найдена на пересечении двух прямых: A^*I'' и траектории движения точки E , т.е. перпендикуляра на ось вращения, опущенного из точки E'' . Отметим, что точка E^* лежит по другую сторону от $D''I''$ по отношению к A^* , B^* и C^* , как и их соответствующие фронтальные проекции.

Соединяем построенные точки A^* , B^* , C^* , E^* и точку $D'' \equiv D^*$, лежащую на оси вращения. Получаем истинную величину заданного пятиугольника.

На рисунке 70 приведен пример оформления задания из домашнего альбома студентов, при решении которого используются Алгоритмы 18.4 и 20.2.

21 Использование методов преобразования проекций для определения расстояния между геометрическими элементами

Кратчайшее расстояние между геометрическими элементами определяют, как правило, пользуясь методом ППП. Всего выделяют 6 основных задач такого рода, которые можно отнести к 2 группам. В первой из них определяют расстояние до прямой: от точки до прямой, между параллельными прямыми, между скрещивающимися прямыми. Задачи этой группы традиционно решают преобразованием прямой общего положения в проецирующую. Вторая группа объединяет задачи, в которых ищут расстояние до плоскости: от точки до плоскости, между параллельными плоскостями, между прямой и параллельной ей плоскостью. Решают задачу преобразованием в проецирующую плоскости общего положения.

21.1 Кратчайшее расстояние до прямой

21.1.1 Определение кратчайшего расстояния от точки до прямой методом перемены плоскостей проекций

- 21.1.1.1 Преобразовать прямую общего положения во фронтальную или горизонтальную прямую (Алгоритм 18.2.1).
- 21.1.1.2 Второй переменной плоскости проекций преобразовать прямую частного положения в проецирующую (Алгоритм 18.2.2).
- 21.1.1.3 Найти проекцию заданной точки во второй измененной плоскости проекций (Алгоритм 18.1.1).
- 21.1.1.4 Во второй измененной плоскости проекций соединить две точки: заданную и ту, в которую спроецировалась прямая. Этот отрезок и есть кратчайшее расстояние от точки до прямой, отображаемое в истинную величину.
- 21.1.1.5 Найти проекцию отрезка кратчайшего расстояния в первой измененной плоскости проекций: она будет параллельна координатной оси между первой и второй измененными плоскостями проекций.

Перв. примен.																												
Справ. №																												
Подп. и дата	<p>Определить истинную величину плоской фигуры вращением вокруг горизонтали (или фронтали) и методом перемены плоскостей проекций. Дать два чертежа.</p>																											
Инв. № докл.																												
Взам. инв. №	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 15%;">Изм.</td> <td style="width: 15%;">Лист</td> <td style="width: 15%;">№ докум.</td> <td style="width: 15%;">Подп.</td> <td style="width: 15%;">Дата</td> </tr> <tr> <td>Разраб.</td> <td>Гнилицца</td> <td></td> <td></td> <td>07.11.15</td> </tr> <tr> <td>Пров.</td> <td>Лютарович</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Н.контр.</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Утв.</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>			Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Разраб.	Гнилицца			07.11.15	Пров.	Лютарович				Н.контр.					Утв.				
Изм.				Лист	№ докум.	Подп.	Дата																					
Разраб.	Гнилицца			07.11.15																								
Пров.	Лютарович																											
Н.контр.																												
Утв.																												
Подп. и дата	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 15%;">Лит.</td> <td style="width: 15%;">Лист</td> <td style="width: 15%;">Листов</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">1</td> </tr> </table>			Лит.	Лист	Листов			1																			
Лит.				Лист	Листов																							
		1																										
Инв. № подл.	<p>Задача № 13 Вариант 31</p>																											
	<p>группа 300</p>																											
	<p>Копировал Формат А4</p>																											

Рисунок 70 – Задание, при решении которого используются Алгоритмы 18.4 и 20.2.

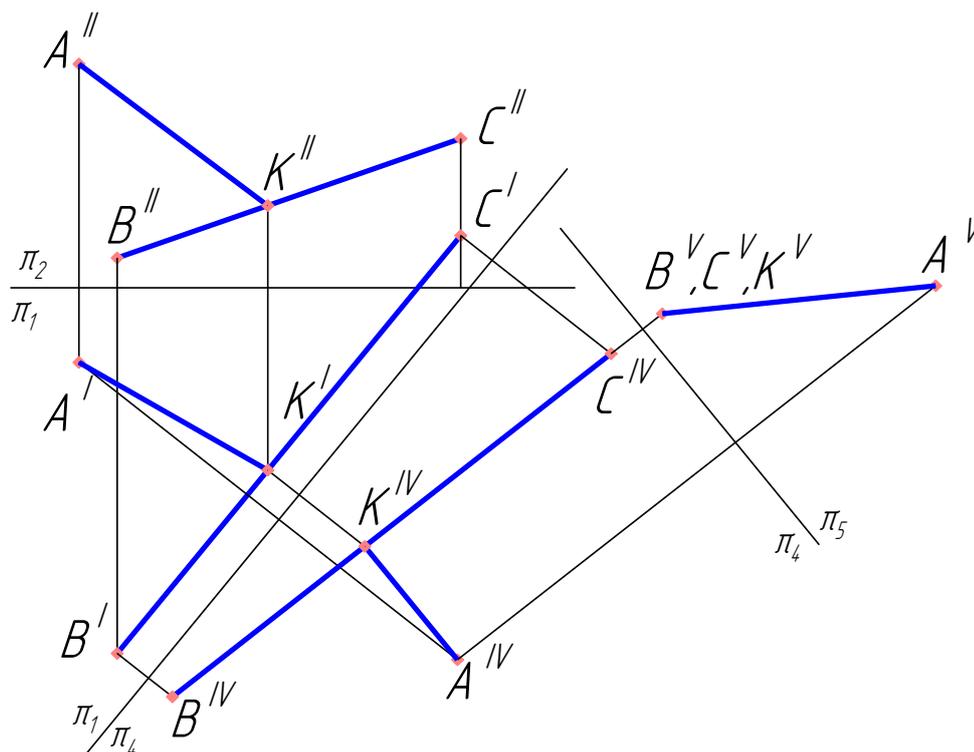


Рисунок 71 – Определение кратчайшего расстояния от точки до прямой методом перемены плоскостей проекций

21.1.1.6 С помощью проекционных связей получить отрезок кратчайшего расстояния в исходных плоскостях проекций.

Пусть заданы точка A и прямая общего положения BC (рисунок 54). Будем искать решение с помощью преобразования прямой в проецирующую двукратным применением метода ППП.

Проведем новую ось координат π_1/π_4 параллельно горизонтальной проекции прямой $B'C'$. Опустим из точек B' и C' перпендикуляры на π_1/π_4 и на их продолжении отложим аппликаты (координаты z) точек B и C , измеренные в исходной фронтальной плоскости проекций от оси π_2/π_1 . Полученный отрезок $B''C''$ в новой системе плоскостей проекций будет фронтальной проекцией отрезка фронтальной прямой.

Вторую переменную плоскостей проекций проведем, прочертив ось π_4/π_5 перпендикулярно $B''C''$. Перпендикуляр на эту ось будет продолжением самого отрезка прямой. Отложенное от оси π_4/π_5 равное расстояние от точек B'' и C'' до оси π_1/π_4 позволит получить проекцию $B''C''$ в виде точки. Спроецируем на π_5 и точку A .

Соединим A^V и $(B''C'')$. В ту же точку проецируется и основание перпендикуляра, опущенного из точки на прямую, - точка K^V . Отрезок $A^V K^V$ является кратчайшим расстоянием от точки A до прямой BC , причем проекция $A^V K^V$ является истинной его величиной.

Так как $A^V K^V$ – истинная величина, то $A''K''$ обязательно пройдет параллельно оси π_1/π_4 . Это свойство горизонтальной прямой позволяет однозначно определить положение точки K на прямой BC . Горизонтальную проекцию точки K' находим на $B'C'$, прочертив проекционный перпендикуляр к оси π_1/π_4 от точки K'' . В проекционной связи с K' на $B''C''$ лежит исходная фронтальная проекция K'' . Отрезки $A''K''$ и $A'K'$ – проекции кратчайшего расстояния от точки A до прямой BC в исходных плоскостях проекций.

21.1.2 Определение кратчайшего расстояния от точки до прямой методом вращения относительно горизонтали (фронтали)

Так как точка и прямая определяют плоскость, кратчайшее расстояние между ними можно найти альтернативным способом, преобразовав эту плоскость в параллельную некоторой плоскости проекций, например, методом вращения.

- 21.1.2.1 Соединить проекции заданной точки и концов заданного отрезка прямой.
- 21.1.2.2 Найти истинную величину вычерченного треугольника методом вращения относительно горизонтали (фронтали) (Алгоритм 20.2).
- 21.1.2.3 В построенном в истинную величину треугольнике опустить перпендикуляр из точки на прямую.
- 21.1.2.4 Перенести основание перпендикуляра с отрезка прямой, видимого в истинную величину, на базовую для вращения проекцию с помощью связи, перпендикулярной к оси вращения.
- 21.1.2.5 Найти вторую проекцию отрезка истинной величины с помощью проекционных связей.

На рисунке 72 проиллюстрировано определение кратчайшего расстояния методом вращения между теми же точкой и прямой, что и на рисунке 71.

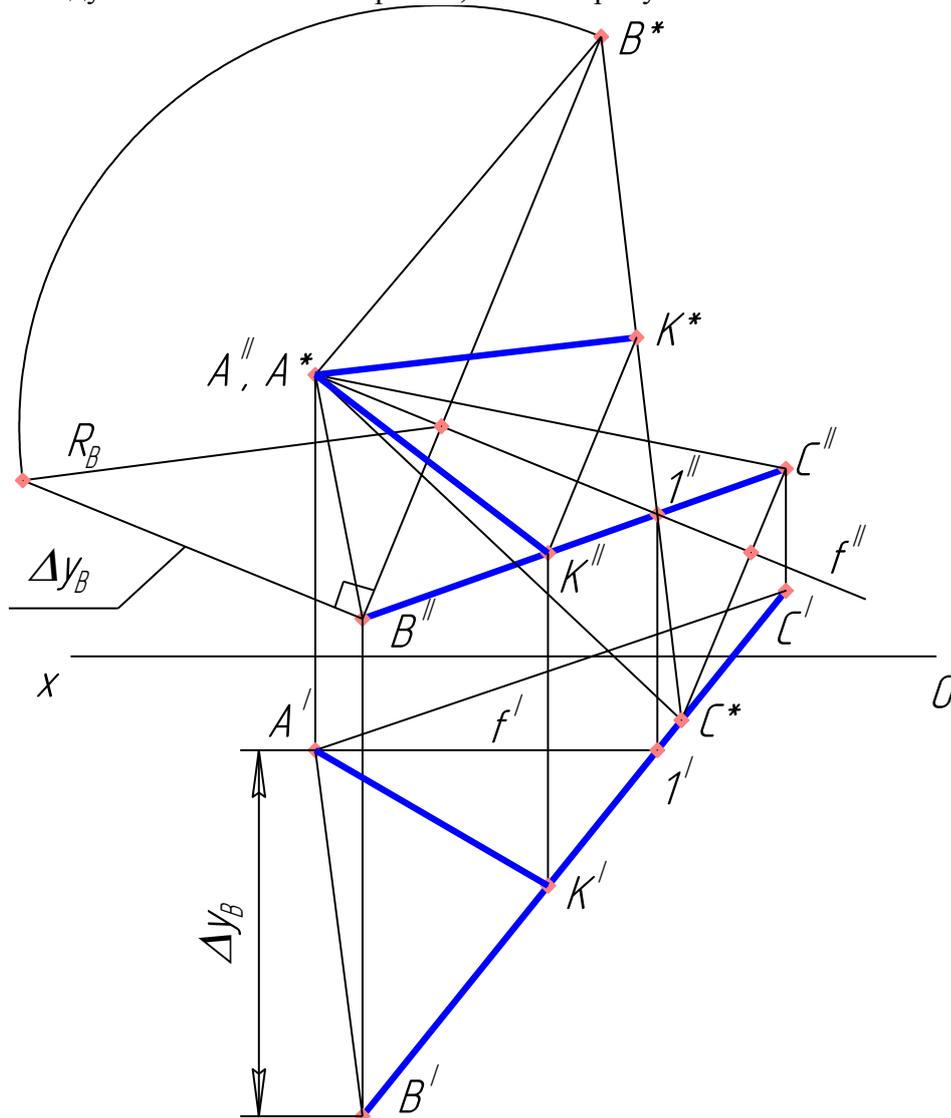


Рисунок 72 - Определение кратчайшего расстояния от точки до прямой методом вращения относительно фронтали

Соединим проекции точки A и концов отрезка BC . В полученном треугольнике построим фронталь: горизонтальная проекция $A'I'$ параллельна оси Ox , фронтальная проекция I'' находится на $B''C''$ в проекционной связи с I' . Отрезок $A''I''$ проецируется в истинную величину. Следовательно, основные построения преобразования вращением будут проводиться во фронтальной плоскости проекций.

Опустим перпендикуляры из B'' и C'' на ось вращения $A''I''$. Отрезок перпендикуляра от B'' до $A''I''$ – проекция радиуса вращения точки B . Истинную величину радиуса R_B найдем методом треугольника. С этой целью под прямым углом к фронтальной проекции радиуса вращения из точки B'' отложим разность ординат Δu_B точек B и A , измеренную в горизонтальной плоскости проекций. Полученную истинную величину радиуса вращения перенесем на траекторию вращения точки B и найдем положение B^* . Отрезок BC содержит точку I , принадлежащую оси вращения. Поэтому C^* находим на пересечении прямой B^*I'' с траекторией перемещения точки C . Точка A^* совпадает с A'' , так как A лежит на оси вращения, а следовательно, как и точка I'' , не меняет своего положения.

Треугольник $A^*B^*C^*$ определяет плоскость, параллельную фронтальной плоскости проекций. Опускаем перпендикуляр из A^* на B^*C^* . Получаем отрезок A^*K^* , являющийся истинной величиной кратчайшего расстояния от точки A до прямой BC .

При вращении вокруг фронтали AI все точки плоскости треугольника в проекции на фронтальную плоскость двигались перпендикулярно $A''I''$. Поэтому фронтальную проекцию точки K'' находим на пересечении $B''C''$ и прямой, проведенной из K^* под прямым углом к $A''I''$. Горизонтальная проекция K' лежит на $B'C'$ в проекционной связи с K'' . Отрезки $A''K''$ и $A'K'$ – проекции кратчайшего расстояния от A до BC в исходных плоскостях проекций.

21.1.3 Кратчайшее расстояние между параллельными прямыми

- 21.1.3.1 Преобразовать прямые общего положения во фронтальные или горизонтальные прямые (Алгоритм 18.2.1).
- 21.1.3.2 Второй переменной плоскости проекций преобразовать прямые частного положения в проецирующие (Алгоритм 18.2.2).
- 21.1.3.3 Во второй измененной плоскости проекций соединить две точки, в которые спроецировались прямые. Этот отрезок и есть кратчайшее расстояние между параллельными прямыми, отображаемое в истинную величину.
- 21.1.3.4 Так как прямые параллельны, то кратчайшее расстояние между ними может быть построено из любой точки каждой из прямых. В первой измененной плоскости проекций выбрать опорную точку отрезка кратчайшего расстояния.
- 21.1.3.5 Найти первую измененную проекцию отрезка кратчайшего расстояния: она будет параллельна координатной оси между первой и второй измененными плоскостями проекций.
- 21.1.3.6 С помощью проекционных связей получить отрезок кратчайшего расстояния в исходных плоскостях проекций.

Пусть заданы две параллельные прямые AB и CD (рисунок 73). Проведем новую координатную ось π_1/π_4 параллельно их горизонтальным проекциям. Построим проекционные связи для измененной фронтальной плоскости проекций перпендикулярно π_1/π_4 . Отложим от π_1/π_4 расстояния от фронтальных проекций концов отрезков прямых A'' , B'' , C'' и D'' до оси OX с учетом знаков координат (аппликата точки C отрицательна). Получим измененные фронтальные проекции $A^{IV}B^{IV}$ и $C^{IV}D^{IV}$. Еще одну ось π_4/π_5 проводим под прямым углом к ним. Отложенное от π_4/π_5 на проекционных перпендикулярах к ней расстояние от A' (B') и C' (D') до оси π_1/π_4 позволяет найти горизонтальные проекции отрезков прямых, спроецировавшихся в точки A^V (B^V) и C^V (D^V). Соединяя эти точки, получим истинную величину кратчайшего расстояния K^VL^V .

В измененной фронтальной плоскости проекций обозначим как K^{IV} произвольную точку отрезка $A^{IV}B^{IV}$. Так как K^VL^V отображается в истинную величину, то прямая KL является горизонтальной в измененных плоскостях проекций. Поэтому ее измененная фронтальная проекция $K^{IV}L^{IV}$ должна быть параллельна π_4/π_5 .

После того как вычерчена проекция $K^{IV}L^{IV}$, горизонтальную проекцию $K'L'$ и фронтальную проекцию $K''L''$ отрезка кратчайшего расстояния строим, используя проекционные связи.

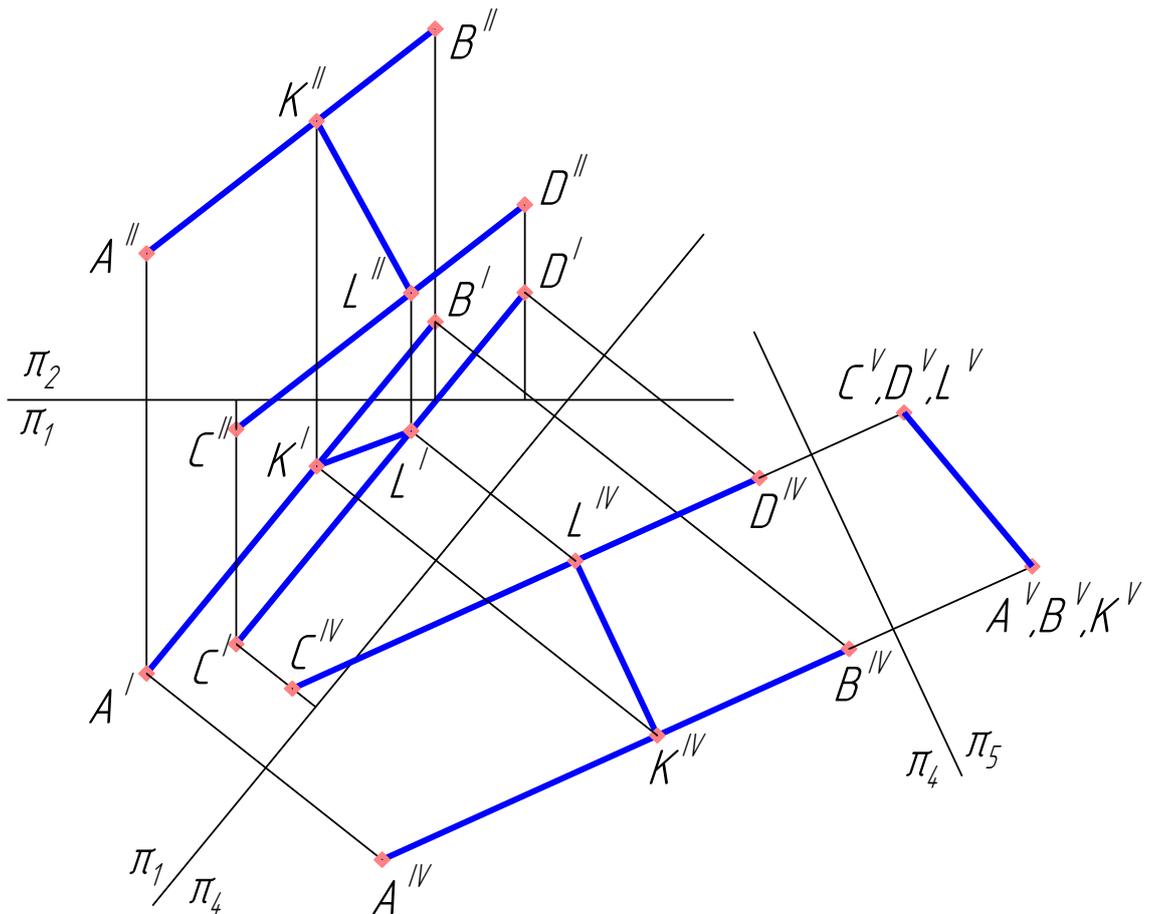


Рисунок 73 – Определение кратчайшего расстояния между параллельными прямыми

21.1.4 Кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми

- 21.1.4.1 Выбрать одну из заданных прямых в качестве базы для построений.
- 21.1.4.2 Преобразовать эту прямую общего положения во фронтальную или горизонтальную прямую (Алгоритм 18.2.1).
- 21.1.4.3 Второй переменной плоскости проекций преобразовать прямую частного положения в проецирующую (Алгоритм 18.2.2).
- 21.1.4.4 Найти проекцию другой прямой во второй измененной плоскости проекций (Алгоритм 18.1.1).
- 21.1.4.5 Во второй измененной плоскости проекций из точки, в которую спроецировалась первая прямая, опустить перпендикуляр на вторую прямую. Этот отрезок и есть кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми, отображаемое в истинную величину.
- 21.1.4.6 С помощью проекционной связи найти на первой измененной проекции второй прямой основание построенного перпендикуляра.
- 21.1.4.7 Найти первую измененную проекцию отрезка кратчайшего расстояния: она будет параллельна координатной оси между первой и второй измененными плоскостями проекций.
- 21.1.4.8 С помощью проекционных связей получить отрезок кратчайшего расстояния в исходных плоскостях проекций.

Пусть заданы две скрещивающиеся прямые AB и CD (рисунок 74). В качестве базы для построений выберем прямую CD . Проведем новую координатную ось π_2/π_4 параллельно её фронтальной проекции. Отложив на проекционных перпендикулярах к π_2/π_4 неизменные ординаты концевых точек отрезков прямых, измеренные в горизонтальной плоскости проекций, получим

измененные горизонтальные проекции $A^{IV}B^{IV}$ и $C^{IV}D^{IV}$. Еще одну ось π_4/π_5 проводим под прямым углом к $C^{IV}D^{IV}$. Опускаем проекционные перпендикуляры на π_4/π_5 и на их продолжениях откладываем расстояния от A'' , B'' и C'' (D'') до оси π_2/π_4 , соответственно. Получаем измененные фронтальные проекции A^VB^V и C^VD^V , причем выбранная в качестве базы для построений CD спроецировалась в точку. Опускаем из этой точки перпендикуляр на A^VB^V . Полученный отрезок K^VL^V и есть кратчайшее расстояние, видимое в истинную величину.

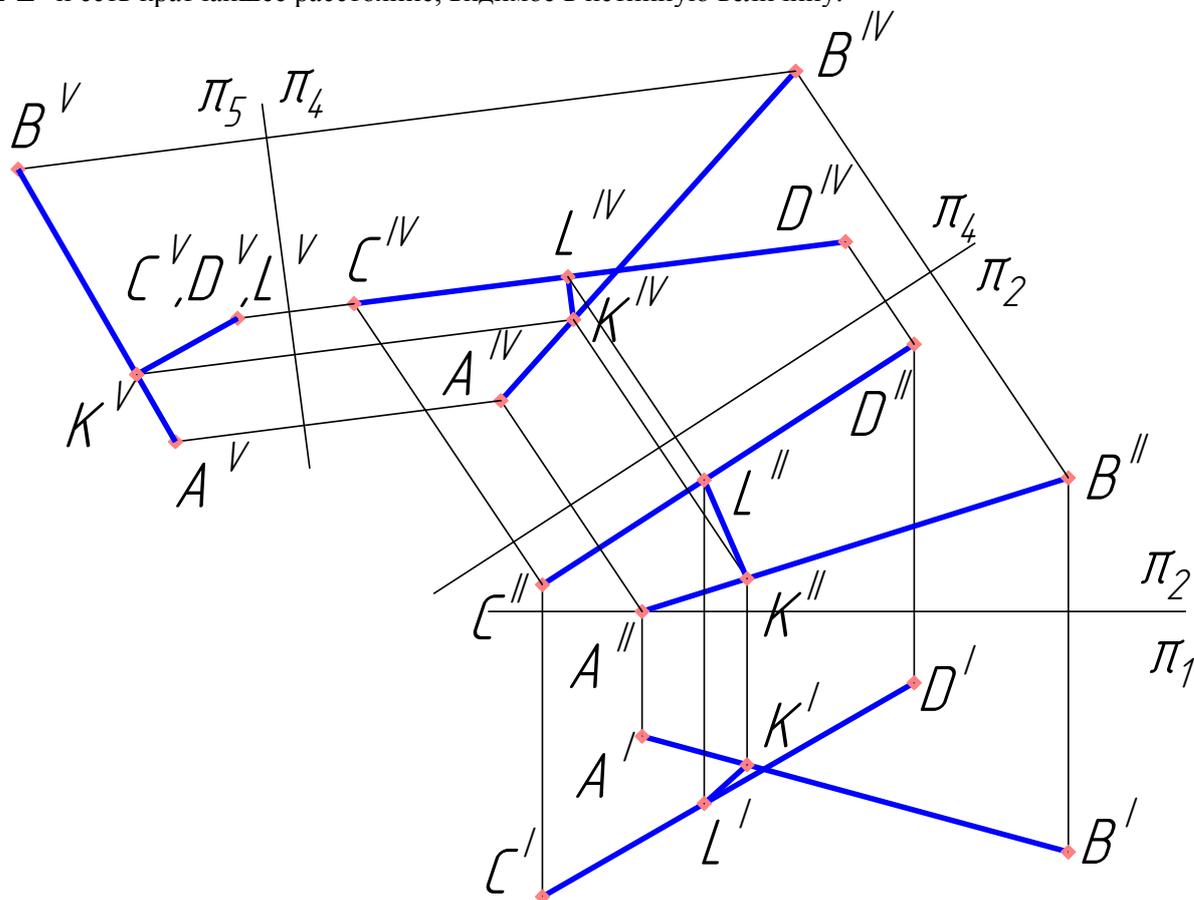


Рисунок 74 - Определение кратчайшего расстояния между скрещивающимися прямыми

Точку K^{IV} на отрезке $A^{IV}B^{IV}$ получаем, проведя проекционную связь из K^V под прямым углом к π_4/π_5 . Так как K^VL^V отображается в истинную величину, то прямая KL является фронтальной в измененных плоскостях проекций, поэтому ее измененная горизонтальная проекция $K^{IV}L^{IV}$ должна быть параллельна π_4/π_5 .

После того как вычерчена $K^{IV}L^{IV}$, фронтальную проекцию $K^{II}L^{II}$ и горизонтальную проекцию K^IL^I кратчайшего расстояния строим, используя проекционные связи.

21.2 Кратчайшее расстояние до плоскости

В задачах, связанных с определением кратчайшего расстояния от какого-либо геометрического элемента до плоскости, требуется изменить всего одну плоскость проекций.

21.2.1 Кратчайшее расстояние от точки до плоскости

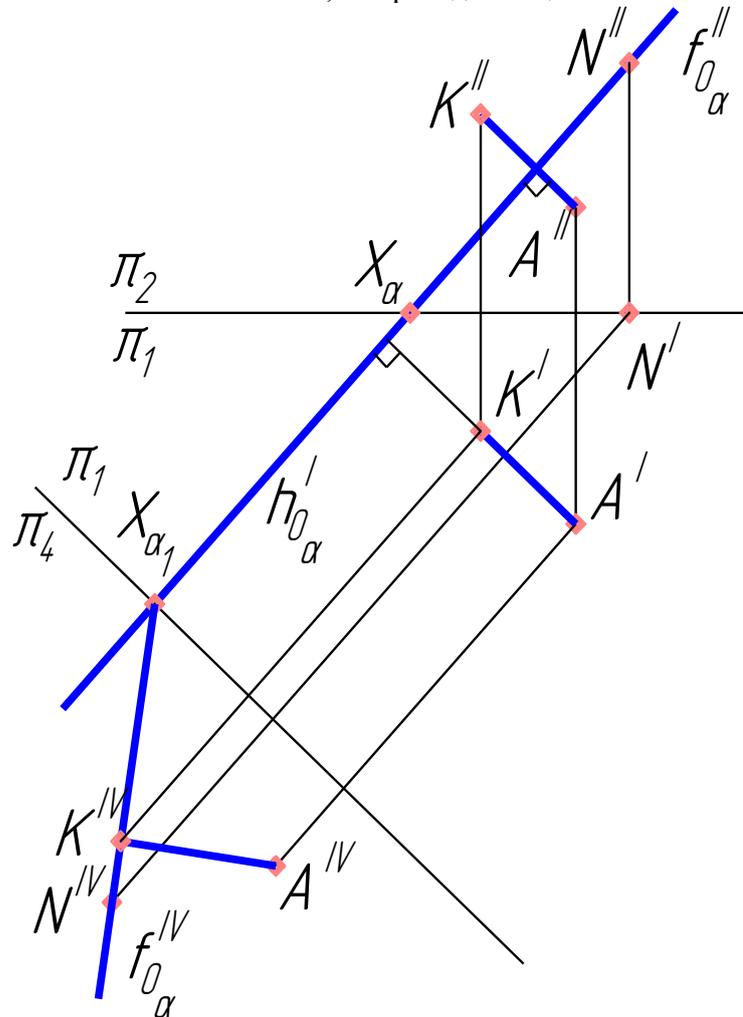
21.2.1.1 Преобразовать плоскость в горизонтально или фронтально проецирующую (Алгоритм 18.3.1).

21.2.1.2 Найти проекцию заданной точки в измененной плоскости проекций (Алгоритм 18.1.1).

21.2.1.3 В измененной плоскости проекций опустить перпендикуляр из точки на проецирующий след плоскости. Этот отрезок и есть кратчайшее расстояние от точки до плоскости, отображаемое в истинную величину.

21.2.1.4 С помощью проекционных связей получить исходные проекции отрезка кратчайшего расстояния на прямой, проходящей через заданную точку и перпендикулярную заданной плоскости (Алгоритм 14).

Пусть заданы плоскость α и точка A , не принадлежащая этой плоскости (рисунок 75).



21.2.1.5 Рисунок 75 – Кратчайшее расстояние от точки до плоскости

Произведем перемену фронтальной плоскости проекций. Проведем новую координатную ось π_1/π_4 под прямым углом к следу $h'_{0\alpha}$. Выберем на следе $f''_{0\alpha}$ произвольную точку N'' . Ее горизонтальная проекция N' лежит в проекционной связи на оси π_2/π_1 . Измененная фронтальная проекция N'' связана с N' проекционной связью, перпендикулярной к π_1/π_4 , и отстоит от этой оси на расстояние, равно $|N''N'|$. Новый фронтальный след $f''_{0\alpha}$ проводим через новую точку схода следов $X_{\alpha 1}$, лежащую на пересечении $h'_{0\alpha}$ с π_1/π_4 , и N'' .

Аналогично построим измененную фронтальную проекцию точки A . На линии проекционной связи, проведенной из A' под прямым углом к π_1/π_4 , от этой оси откладываем то же расстояние, что и от исходной фронтальной проекции A'' до оси π_2/π_1 . Получаем A'' .

Из нее опускаем перпендикуляр на след $f''_{0\alpha}$ и в его основании, на следе отмечаем точку K'' . Отрезок $A''K''$ и есть истинная величина кратчайшего расстояния от A до α . Возвращаем отрезок кратчайшего расстояния в исходные проекции. Опустим из проекций точки A перпендикуляры на соответствующие следы плоскости α . Теперь для получения K' и K'' достаточно правильно провести проекционные связи. Отрезки $A'K'$ и $A''K''$ – проекции отрезка кратчайшего расстояния в исходных плоскостях проекций.

21.2.2 Кратчайшее расстояние между параллельными плоскостями

- 21.2.2.1 Преобразовать обе заданные плоскости в горизонтально или фронтально проецирующие (Алгоритм 18.3.1).
- 21.2.2.2 В измененной плоскости проекций из произвольной точки на следе одной из плоскостей опустить перпендикуляр на след второй плоскости. Этот отрезок и есть кратчайшее расстояние между параллельными плоскостями, отображаемое в истинную величину.
- 21.2.2.3 В проекционной связи с одним из концов отрезка кратчайшего расстояния выбрать произвольную точку в неизменяемой плоскости проекций. Проекцию второго конца отрезка построить в проекционной связи на прямой, перпендикулярной к одноименным следам заданных плоскостей.
- 21.2.2.4 Используя проекционные связи и координаты в измененной плоскости проекций, найти проекцию кратчайшего расстояния в исходной плоскости проекций.
- Пусть следами заданы две параллельные плоскости – α и β (рисунок 76).

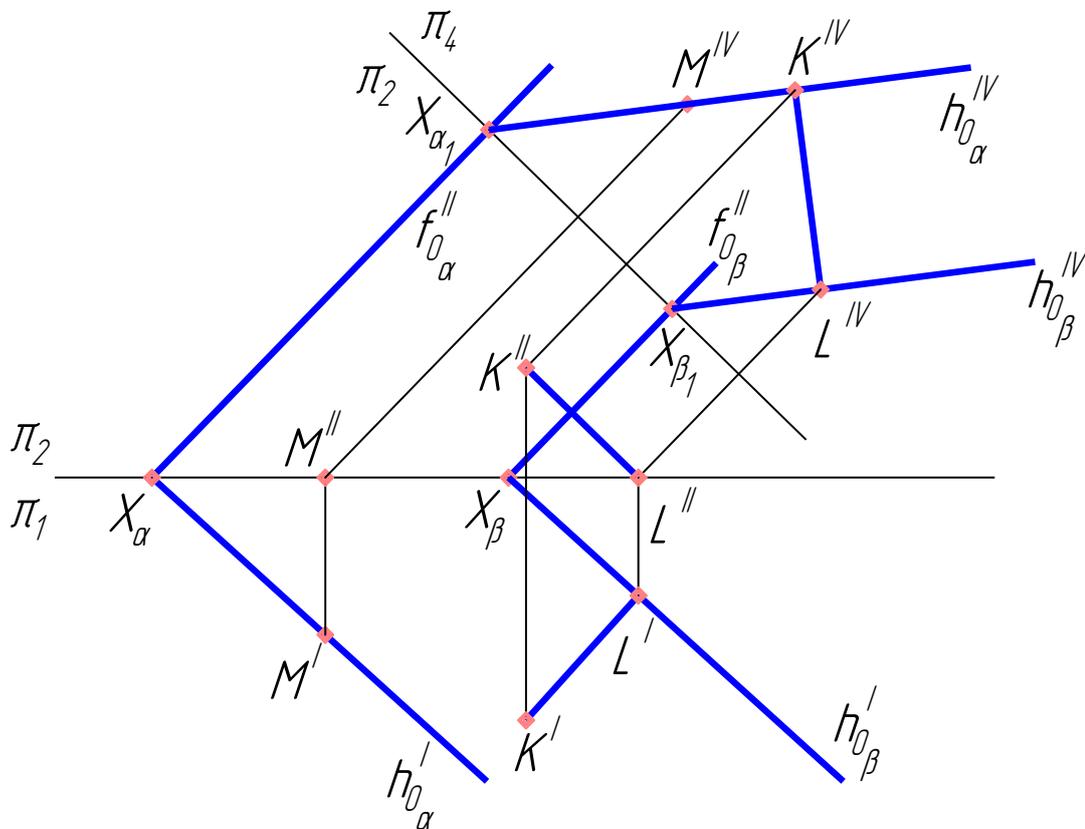


Рисунок 76 – Кратчайшее расстояние между параллельными плоскостями

Изменим горизонтальную плоскость проекций. Новую ось π_4/π_2 проведем перпендикулярно фронтальным следам заданных плоскостей. Для построения измененного горизонтального следа плоскости используем произвольную точку M' на следе $h'_{0\alpha}$. Находим ее измененную горизонтальную проекцию M^{IV} . След $h^{IV}_{0\alpha}$ проходит через новую точку схода следов $X_{\alpha 1}$, лежащую на пересечении $f'_{0\alpha}$ с π_4/π_2 , и M^{IV} . След $h^{IV}_{0\beta}$ проходит параллельно следу $h^{IV}_{0\alpha}$ через аналогичным образом найденную точку схода $X_{\beta 1}$. Плоскости α и β стали горизонтально-проецирующими.

Выберем на $h^{IV}_{0\alpha}$ произвольную точку K^{IV} . Опустим из нее перпендикуляр на след $h^{IV}_{0\beta}$. В его основании, на следе $h^{IV}_{0\beta}$ лежит проекция второго конца отрезка кратчайшего расстояния – точка L^{IV} . Из этой точки проведем линию проекционной связи, перпендикулярную оси π_4/π_2 , до пересечения с осью π_2/π_1 . Отметим проекцию L'' . Выбор ее на оси π_2/π_1 облегчит нам дальнейшие построения. Вычертим из L'' линию, перпендикулярную фронтальным следам заданных

плоскостей. На ней в проекционной связи с K^{IV} построим K'' . Так как L'' лежит на координатной оси, горизонтальная проекция L' принадлежит следу плоскости h'_{α} . Точку K' найдем в проекционной связи на перпендикуляре, построенном из L' к горизонтальным следам заданных плоскостей. Отрезки $K'L'$ и $K''L''$ – проекции кратчайшего расстояния между плоскостями α и β в исходных плоскостях проекций.

21.2.3 Кратчайшее расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью

Отметим, что при задании условия задач такого рода всегда вычерчивают две прямых. Одна из них принадлежит заданной плоскости. Ее функция состоит лишь в том, чтобы подтвердить параллельность прямой и плоскости, и в построениях она не используется.

21.2.3.1 Преобразовать плоскость в горизонтально или фронтально проецирующую (Алгоритм 18.3.1).

21.2.3.2 Найти проекцию заданного отрезка прямой в измененной плоскости проекций (Алгоритм 18.1.1).

21.2.3.3 Из произвольной точки построенной проекции отрезка прямой опустить перпендикуляр на след плоскости в измененной плоскости проекций. Этот отрезок и есть кратчайшее расстояние от прямой до плоскости, отображаемое в истинную величину.

21.2.3.4 С помощью проекционных связей найти исходные проекции отрезка кратчайшего расстояния на соответствующих проекциях прямой, перпендикулярной заданной плоскости (Алгоритм 14).

На рисунке 77 оформлено задание 14 из альбома домашних заданий, при решении которого используется один из Алгоритмов 21; в данном случае – это Алгоритм 21.2.3.

Пусть заданы прямая AB и параллельная ей плоскость α (параллельность доказана построением прямой MN , принадлежащей α).

Произведем перемену горизонтальной плоскости проекций. Вычертим новую ось координат π_1/π_2 под прямым углом к следу f''_{α} . С помощью точки M' , лежащей на горизонтальном следе h'_{α} , получим след плоскости h^{IV}_{α} в преобразованной горизонтальной плоскости. В эту же плоскость проекций перенесем прямую AB . Выполняя преобразования, учитываем отрицательную ординату точки A . Как следствие, расстояние проекции A^{IV} от оси π_1/π_2 отложено в сторону, противоположную направлению, выбранному для M^{IV} и B^{IV} .

Так как расстояние между параллельными прямой и плоскостью постоянно, за основание отрезка кратчайшего расстояния выберем одну из концевых точек заданного отрезка прямой AB . Это сократит необходимые построения. Опустим из A^{IV} перпендикуляр на след h^{IV}_{α} . В его основании отметим точку K^{IV} . Отрезок $A^{IV}K^{IV}$ представляет собой кратчайшее расстояние между AB и α , проецируемое в истинную величину.

Построим в исходных плоскостях проекциях прямую, перпендикулярную плоскости α , проходящую через точку A . Ее проекции будут перпендикулярны соответствующим следам плоскости – h'_{α} и f''_{α} . На этих проекциях, с помощью проекционных связей, получим соответствующие проекции точки K . Отрезки $A''K''$ и $A'K'$ являются проекциями кратчайшего расстояния между AB и α в исходных плоскостях проекций.

22 Применение методов преобразования эюра для определения угла между геометрическими элементами

Стороны плоского угла представляют собой пересекающиеся прямые, задающие плоскость. Чтобы определить истинную величину искомого угла, необходимо преобразовать эту плоскость в параллельную некоторой плоскости проекций. Как мы отмечали ранее, при наименьшем количестве операций это может быть сделано методом вращения, например, относительно горизонтали или фронтали.

Перв. примен.																																																			
Справ. №																																																			
Подп. и дата	<p>Определить кратчайшее расстояние между прямой AB и параллельной ей плоскостью α.</p>																																																		
Инв. № докум.																																																			
Взам. инв. №	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 10%;"></td> </tr> <tr> <td>Изм.</td> <td>Лист</td> <td>№ докум.</td> <td>Подп.</td> <td>Дата</td> <td colspan="3"></td> </tr> <tr> <td>Разраб.</td> <td>Гнилицца</td> <td></td> <td></td> <td>13.11.15</td> <td colspan="3"></td> </tr> <tr> <td>Пров.</td> <td>Лютарович</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td colspan="3"></td> </tr> <tr> <td>Н.контр.</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td colspan="3"></td> </tr> <tr> <td>Утв.</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td colspan="3"></td> </tr> </table>											Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата				Разраб.	Гнилицца			13.11.15				Пров.	Лютарович							Н.контр.								Утв.							
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата																																															
Разраб.	Гнилицца			13.11.15																																															
Пров.	Лютарович																																																		
Н.контр.																																																			
Утв.																																																			
Подп. и дата	<p style="font-size: 1.2em; font-weight: bold;">Задача № 14</p> <p style="font-size: 1.2em; font-weight: bold;">Вариант 31</p>																																																		
Инв. № подл.																																																			
				<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 33%;">Лит.</td> <td style="width: 33%;">Лист</td> <td style="width: 33%;">Листов</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">1</td> </tr> </table>			Лит.	Лист	Листов			1																																							
Лит.	Лист	Листов																																																	
		1																																																	
				группа 300																																															
Копировал				Формат А4																																															

Рисунок 77 – Пример оформления задания, в котором определено кратчайшее расстояние от прямой до параллельной ей плоскости (Алгоритм 21.2.3).

В задачах определяют угол между следующими геометрическими элементами: пересекающимися прямыми, скрещивающимися прямыми, между прямой и плоскостью, между двумя плоскостями. Однако в основе любого решения лежит определение угла между пересекающимися прямыми.

22.1 Угол между пересекающимися прямыми

22.1.1 Решение методом вращения относительно горизонтали (фронтала)

22.1.1.1 Провести горизонталь или фронталь плоскости, задаваемой пересекающимися прямыми, не проходящую через точку их пересечения. Она будет осью вращения операции вращения.

22.1.1.2 Определить методом вращения относительно горизонтали (фронтала) истинную величину треугольника (Алгоритм 20.2), очерченного построенной линией частного положения и сторонами искомого угла.

22.1.1.3 Обозначить искомый угол, учитывая, что его величина лежит в пределах от 0° до 90° , т.е. если в построенном в истинную величину треугольнике найденный угол тупой, то отметить следует сопряженный угол, дополняющий его до 180° .

На рисунке 78, а приведены построения для определения угла между пересекающимися прямыми AB и CD методом вращения относительно горизонтали.

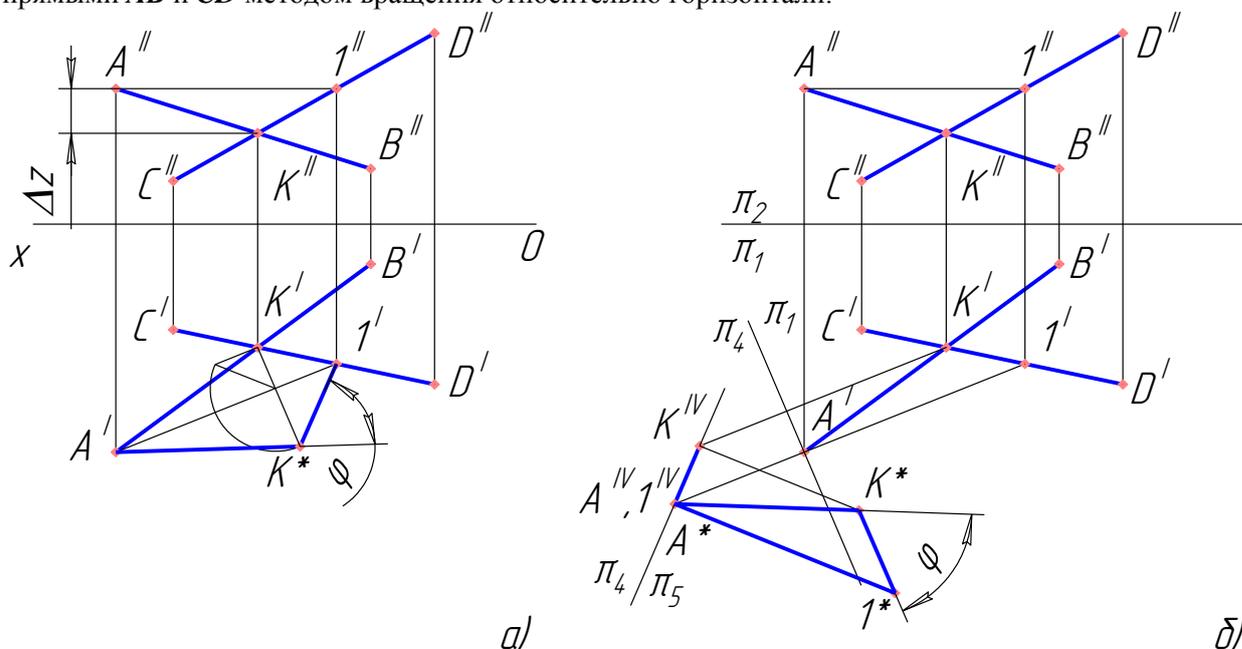


Рисунок 78 – Определение угла между пересекающимися прямыми: а) методом вращения относительно горизонтали; б) методом перемены плоскостей проекций

Проведем в плоскости, заданной пересекающимися прямыми, горизонталь: ее фронтальная проекция $A''I''$ параллельна оси Ox , горизонтальная проекция I' найдена в проекционной связи. Горизонтальная проекция горизонтали $A'I'$ проецируется в истинную величину. Основные построения выполняем в горизонтальной плоскости проекций.

Найдем истинную величину треугольника AKI , содержащего при вершине K искомый угол. Точки A и I лежат на оси вращения, поэтому построение необходимо выполнить только для точки K . Построим траекторию перемещения точки K' при вращении относительно горизонтали: она перпендикулярна оси вращения $A'I'$. Причем отрезок траектории от K' до пересечения с $A'I'$ представляет собой проекцию радиуса вращения. Определим истинную величину этого отрезка методом треугольника, построив под прямым углом к нему из точки K' недостающую разность координат точки K и точек на оси вращения (на чертеже обозначена, как Δz). Вычерченную истинную величину переносим на траекторию вращения – определяем местонахождение точки K

при повороте плоскости в положение, параллельное горизонтальной плоскости проекций. Это точка K^* . Соединяем K^* с точками A' и I' . Треугольник $A'K^*I'$ проецируется в истинную величину.

Угол при вершине K^* также отображается в истинную величину, однако он – тупой, поэтому в качестве искомого (φ) отмечаем угол, дополняющий его до 180° .

22.1.2 Решение методом перемены плоскостей проекций

22.1.2.1 Провести горизонталь или фронталь плоскости, задаваемой пересекающимися прямыми, не проходящую через точку их пересечения. Ее проекция, параллельная одной из плоскостей проекций, задаст направление первой перемены плоскостей.

22.1.2.2 Определить методом ППП истинную величину треугольника (Алгоритм 18.4), очерченного построенной линией частного положения и сторонами искомого угла.

22.1.2.3 Обозначить искомым угол, учитывая, что его величина лежит в пределах от 0° до 90° .

На рисунке 78, б метод перемены плоскостей проекций использован для тех же прямых AB и CD , что и на рисунке 78, а. Как и ранее, для выполнения преобразований, вычерчена горизонталь $A'I'$.

Проведем новую ось координат π_1/π_4 под прямым углом к горизонтальной проекции горизонтали $A'I'$. Восстановим проекционные связи, перпендикулярные к ней, и от оси π_1/π_4 отложим на них аппликаты точек K , A и I , измеренные в исходной фронтальной проекции. Плоскость треугольника AKI спроецировалась в одну линию, определяемую отрезком $A^{IV}K^{IV}$. Проводим вторую переменную, проведя ось π_4/π_5 параллельно этому отрезку или, как в данном решении, через него. Теперь на линии проекционной связи, прочерченные под прямым углом к π_4/π_5 , откладываем расстояния до оси π_1/π_4 , измеренные в исходной горизонтальной плоскости проекций. Построенный в новой горизонтальной плоскости проекций треугольник $A^*K^*I^*$ отображается в истинную величину.

Угол при вершине K^* также отображается в истинную величину, однако он – тупой, поэтому в качестве искомого (φ) отмечаем угол, дополняющий его до 180° .

Сравнив описанные только что построения и построения, выполненные при вращении относительно горизонтали (рисунок 78, а), можно отметить, что метод ППП требует значительно большего их объема. Поэтому в последующих решениях, связанных с определением углов, мы, как правило, будем использовать метод вращения, хотя, после того как определена плоскость треугольника, содержащего искомым угол, можно использовать любой изученный метод для определения истинной величины плоской фигуры.

22.2 Угол между скрещивающимися прямыми

За угол между скрещивающимися прямыми принимают угол между пересекающимися прямыми, параллельными заданным.

22.2.1 Выбрав за базовую одну из заданных прямых, пересечь ее другой, параллельной второй заданной прямой.

22.2.2 Найти угол между полученными пересекающимися прямыми (Алгоритм 22.1).

Пусть заданы скрещивающиеся прямые AB и CD (рисунок 79).

Вычертим отрезок прямой AK параллельно прямой CD : проекция $A'K'$ параллельна $C'D'$, а $A''K'' - C''D''$. Пересекающиеся прямые AB и AK определяют плоскость, в которой при вершине A лежит искомым угол.

Будем искать истинную величину угла методом вращения относительно фронтали. Горизонтальную проекцию фронтали $K'I'$ вычертим параллельно оси Ox . Точку I'' найдем в проекционной связи. Фронтальная проекция оси вращения $K''I''$ отображается в истинную величину. Основные построения выполняем во фронтальной плоскости проекций.

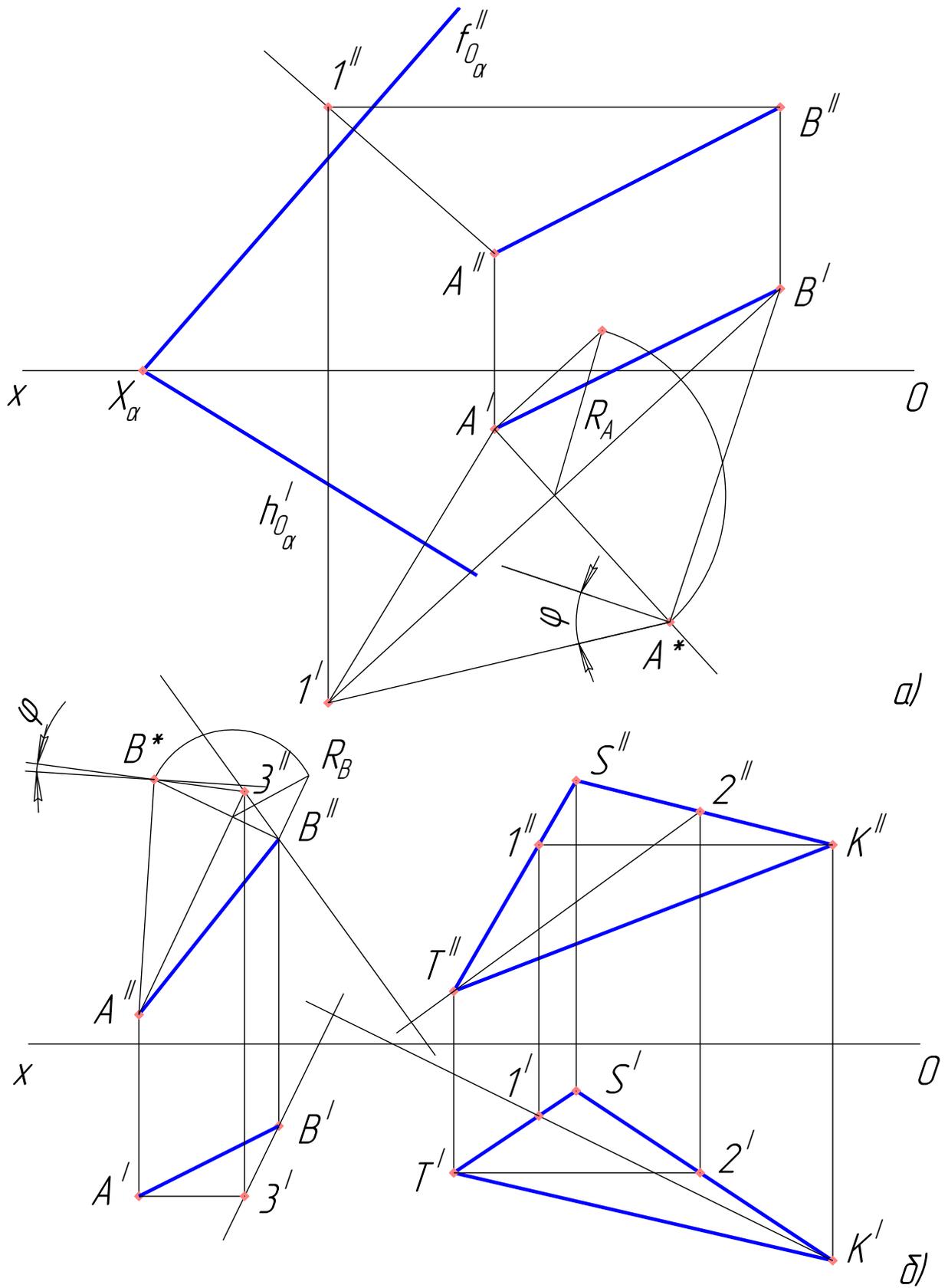


Рисунок 80 – Определение угла между прямой и плоскостью, заданной: а) следами; б) плоской фигурой

На рисунке 80, а плоскость α задана следами. Из вершины A отрезка, задающего прямую AB , опустим перпендикуляр на заданную плоскость. Фронтальная проекция этого перпендикуляра

проходит под прямым углом к $f''_{0\alpha}$, а горизонтальная – к $h'_{0\alpha}$. Заданная прямая и проведенный перпендикуляр определяют плоскость, в которой лежит искомый угол.

Вычертим горизонталь этой плоскости. Ее фронтальная проекция $B''I''$ параллельна оси Ox , а горизонтальная $B'I'$ построена в проекционной связи. Горизонтальная проекция горизонтали отображается в истинную величину, следовательно, основные построения выполняем в горизонтальной плоскости проекций. Точки B и I лежат на оси вращения, поэтому построения будут связаны с точкой A ; истинная величина угла при этой вершине нас и интересует.

Траектория перемещения A на плоскости π_I проецируется в виде прямой, перпендикулярной к $B'I'$. Построение истинной величины радиуса вращения R_A выполняем методом треугольника, недостающую разность координат ($z_A - z_B$) определяем на фронтальной плоскости проекций. Найденную истинную величину радиуса переносим на траекторию вращения, находим точку A^* .

Треугольник $I'A^*B'$ отображается в истинную величину. Угол при вершине A^* – тупой, поэтому для определения искомого угла вписываем в него прямой угол. Разность между найденным тупым углом и прямым углом и даст нам искомый угол φ .

Плоскость на рисунке 80, б задана треугольником TSK . Чтобы из любой точки прямой AB опустить на него перпендикуляр, определим вначале направления следов этой плоскости с помощью горизонтали KI и фронтали $T2$. Перпендикуляр опускаем из точки B : его фронтальная проекция проходит под прямым углом к $T''2''$, а горизонтальная проекция перпендикулярна к $K'I'$.

Последующие построения аналогичны уже описанным выше для задачи, решенной на рисунке 80, а. Различия состоят лишь в том, что в данном случае вращение производилось относительно фронтали $A3$, поэтому основные построения выполнялись во фронтальной плоскости проекций. Как следствие, недостающая разность координат ($y_A - y_B$) при построении радиуса вращения R_B измерялась в плоскости π_I .

В результате нами получен в истинную величину треугольник $A''B^*3''$, содержащий при вершине B^* угол, который позволит нам рассчитать искомый. Этот угол – острый. Построим на одной из его сторон прямой угол. Искомый угол φ получаем как разность между прямым и острым углом треугольника.

22.4 Угол между плоскостями

22.4.1 Построение методом вращения относительно горизонтали (фронтали)

Угол между двумя плоскостями определяется в плоскости, перпендикулярной к каждой из заданных плоскостей. Такая плоскость может быть задана двумя прямыми, каждая из которых составляет прямой угол с одной из заданных плоскостей.

22.4.1.1 Из произвольной точки пространства опустить перпендикуляры на заданные плоскости (Алгоритм 14.1, пп. 14.1.2 и 14.1.3). Построенные перпендикуляры представляют собой пересекающиеся прямые, угол между которыми позволит найти искомый.

22.4.1.2 Найти угол между полученными пересекающимися прямыми (Алгоритм 22.1).

22.4.1.3 Обозначить искомый угол, учитывая, что его величина лежит в пределах от 0° до 90° , т.е. если в построенном в истинную величину треугольнике найденный угол тупой, то отметить следует сопряженный угол, дополняющий его до 180° .

На рисунке 81 приведены решения, реализующие описанный Алгоритм, для плоскостей заданных различным образом.

Рисунок 81, а показывает плоскости α и β , заданные следами. Из произвольной точки пространства K опустим перпендикуляры на эти плоскости. Их фронтальные проекции проходят под прямым углом к $f''_{0\alpha}$ и $f''_{0\beta}$, а соответствующие горизонтальные проекции перпендикулярны $h'_{0\alpha}$ и $h'_{0\beta}$.

В пределах плоскости, заданной этими перпендикулярами, проведем фронталь: ее горизонтальная проекция $I'2'$ параллельна оси Ox , а фронтальная проекция $I''2''$ строится в проекционной связи. Отрезок $I''2''$ отображается в истинную величину, следовательно, основные

построения, связанные с преобразованием методом вращения, выполняем во фронтальной плоскости проекций. Точки I и 2 лежат на оси вращения, поэтому будем искать преобразованное положение точки K , при этой вершине треугольника и содержится искомый угол.

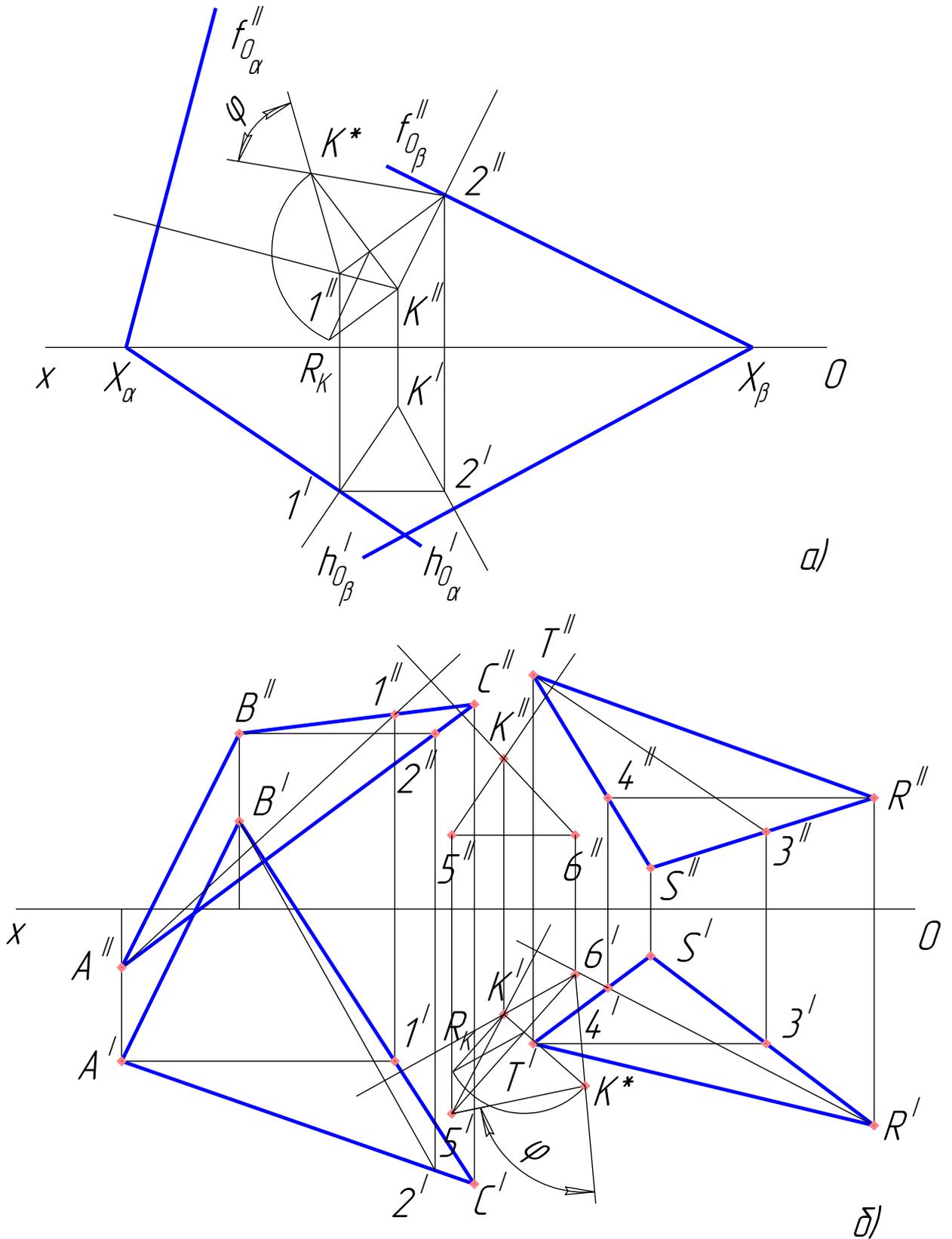


Рисунок 81 – Определение угла между плоскостями с применением метода вращения:
 а) плоскости заданы следами; б) плоскости заданы фигурами

Точка K'' будет двигаться по прямой, перпендикулярной оси вращения $I''2''$. Истинную величину радиуса вращения R_K находим методом треугольника с использованием разности координат $(y_K - y_I)$, измеренной в горизонтальной плоскости проекций. Полученный радиус переносим на траекторию вращения и находим точку K^* .

Треугольник $I''K^*2''$ спроецирован в истинную величину. Угол при вершине K^* – острый, следовательно, его мы можем обозначить как искомый (φ) .

На рисунке 81, б плоскости заданы треугольниками ABC и TRS . Построим фронталы и горизонталы этих плоскостей. Из произвольной точки пространства K опустим перпендикуляры на заданные плоскости. Их фронтальные проекции проходят под прямым углом к фронтальным проекциям фронталей $A''1''$ и $T''3''$, а горизонтальные проекции, соответственно, перпендикулярны горизонтальным проекциям горизонталей $B'2'$ и $R'4'$.

В пределах плоскости, заданной этими перпендикулярами, проведем горизонталь: ее фронтальная проекция $5''6''$ параллельна оси Ox , а горизонтальная проекция $5'6'$ строится в проекционной связи. Отрезок $5'6'$ отображается в натуральную величину, поэтому основные построения, связанные с определением истинных величин методом вращения, проводим в горизонтальной плоскости проекций. Ищем преобразованное положение точки K , при этой вершине треугольника содержится искомый угол.

Построения аналогичны описанным выше, за исключением того, что для определения истинной величины радиуса вращения R_K использовалась разность координат $(z_K - z_S)$, измеренная во фронтальной плоскости проекций. Полученный в результате преобразования треугольник $5'6'K^*$ отображается в истинную величину. Угол при вершине K^* – тупой, поэтому в качестве искомого (φ) мы обозначим угол, дополняющий его до 180° .

22.4.2 Построение методом перемены плоскостей проекций

В том случае, когда обе плоскости заданы следами, пересекающимися в плоскости чертежа, их линия пересечения может быть определена без особых трудностей. Это позволяет методом ППП преобразовать ее в проецирующую прямую и отобразить искомый угол в натуральную величину.

22.4.2.1 Найти проекции линии пересечения заданных плоскостей (Алгоритм 16.1.1).

22.4.2.2 Методом перемены плоскостей проекций перевести линию пересечения в положение фронталы или горизонталы (Алгоритм 18.2.1).

22.4.2.3 Построить следы заданных плоскостей в первой преобразованной плоскости проекций: они должны быть параллельны проекции линии пересечения, отображаемой в истинную величину.

22.4.2.4 Вторым преобразованием перевести линию пересечения плоскостей в проецирующее положение (Алгоритм 18.2.2).

22.4.2.5 Построить следы плоскостей во второй преобразованной плоскости проекций: они занимают проецирующее положение и проходят через точку, в которую спроецировалась линия пересечения.

22.4.2.6 Обозначить во второй преобразованной плоскости проекций острый угол между следами заданных плоскостей в качестве искомого.

На рисунке 82 описанный Алгоритм реализован для тех же плоскостей, для которых были выполнены построения методом вращения относительно фронталы на рисунке 81, а.

Отметим точки пересечения одноименных следов заданных плоскостей α и β и построим их вторые проекции, лежащие на оси π_2/π_1 . Соединим одноименные проекции этих точек и получим в двух проекциях отрезок MN , принадлежащий линии пересечения α и β .

Вычертим новую ось π_1/π_4 параллельно горизонтальной проекции линии пересечения $M'N'$. Построим преобразованную фронтальную проекцию отрезка MN : линии проекционной связи от M' и N' проведем под прямым углом к π_1/π_4 ; точка M^{IV} лежит непосредственно на оси π_1/π_4 , а расстояние от π_1/π_4 до N^{IV} равно расстоянию от π_2/π_1 до N'' . В системе исходной горизонтальной и преобразованной фронтальной плоскости проекций (π_1/π_4) отрезок MN является

общей фронталью плоскостей α и β . Поэтому новые фронтальные следы $f''_{1\alpha}$ и $f''_{1\beta}$ проводим от полученных на оси π_1/π_4 точек схода $X_{\alpha 1}$ и $X_{\beta 1}$ параллельно $M^V N^V$.

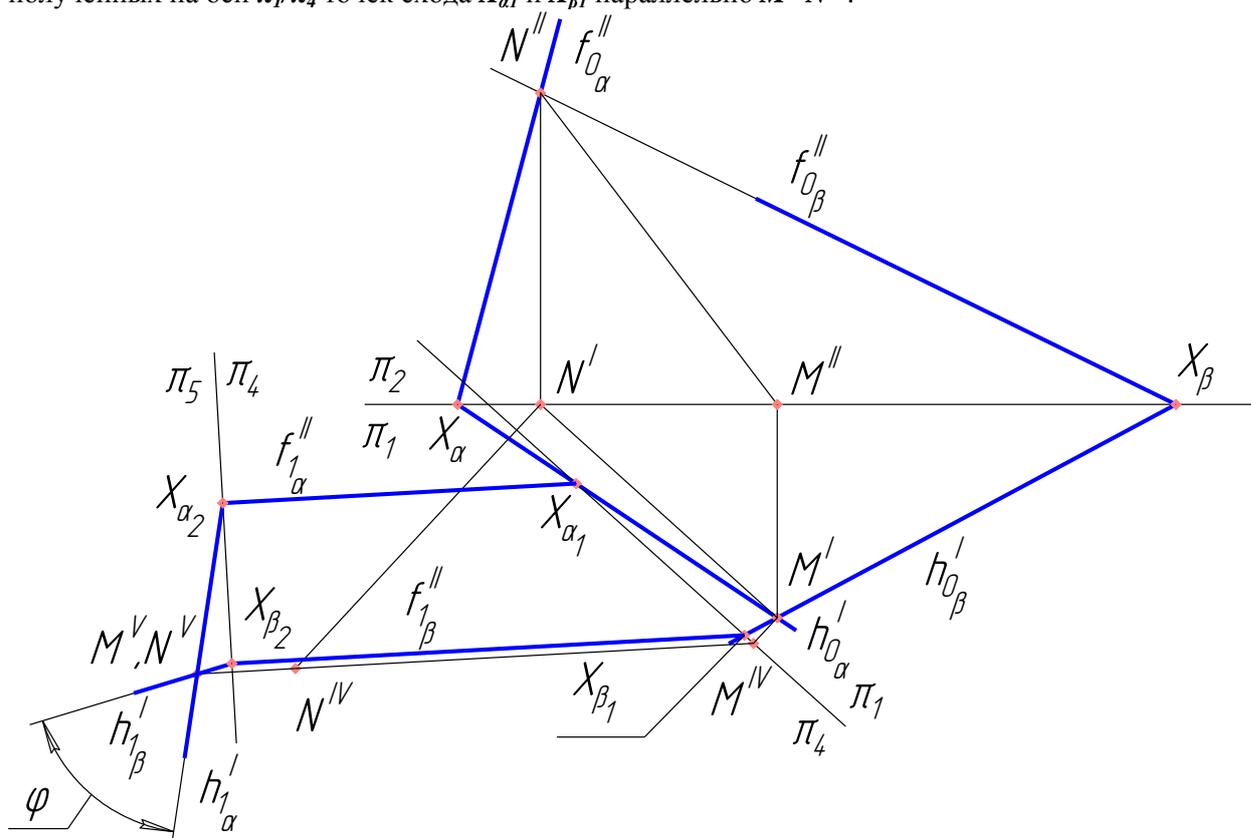


Рисунок 82 – Определение угла между плоскостями, заданными следами, методом перемены плоскостей проекций

Второе преобразование выполним, прочертив ось π_3/π_4 перпендикулярно $M^V N^V$. В новой горизонтальной плоскости проекций линия пересечения заданных плоскостей проецируется в точку, лежащую на продолжении $M^V N^V$ и отстоящую от π_3/π_4 на то же расстояние, на которое $M' N'$ удалена от π_1/π_4 . Через эту же точку пройдут и оба преобразованных горизонтальных следа $h'_{1\alpha}$ и $h'_{1\beta}$, причем в системе преобразованных плоскостей проекций α и β – горизонтально-проецирующие. Следовательно, угол между плоскостями равен углу между их проецирующими следами. Искомый угол отмечаем как φ .

На рисунке 83 представлен пример оформления обязательного задания для студентов, при решении которого используется один из Алгоритмов, описанных в пунктах 22.3 и 22.4.

Обратите внимание на то, что у заданных плоскостей параллельны фронтальные следы.

Задача решалась традиционным способом, с использованием перпендикуляров, опущенных из произвольной точки пространства. При этом был получен содержащий искомый угол треугольник, занимающий фронтально проецирующее положение. Это позволило найти истинную величину угла между плоскостями с помощью одной перемены плоскостей проекций.

Перв. примен.																																																				
Справ. №																																																				
Подп. и дата	<p>Определить истинную величину угла между заданными геометрическими элементами.</p>																																																			
Инв. № дудл.																																																				
Взам. инв. №	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 10%;"></td> </tr> <tr> <td>Изм.</td> <td>Лист</td> <td>№ докум.</td> <td>Подп.</td> <td>Дата</td> <td colspan="3"></td> </tr> <tr> <td>Разраб.</td> <td colspan="2">Гнилицша</td> <td></td> <td>15.11.15</td> <td colspan="3"></td> </tr> <tr> <td>Проб.</td> <td colspan="2">Лютарович</td> <td></td> <td></td> <td colspan="3"></td> </tr> <tr> <td>Н.контр.</td> <td colspan="2"></td> <td></td> <td></td> <td colspan="3"></td> </tr> <tr> <td>Утв.</td> <td colspan="2"></td> <td></td> <td></td> <td colspan="3"></td> </tr> </table>												Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата				Разраб.	Гнилицша			15.11.15				Проб.	Лютарович							Н.контр.								Утв.							
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата																																																
Разраб.	Гнилицша			15.11.15																																																
Проб.	Лютарович																																																			
Н.контр.																																																				
Утв.																																																				
Подп. и дата	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 10%;"></td> </tr> <tr> <td>Лит.</td> <td>Лист</td> <td colspan="2">Листов</td> <td colspan="4"></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td colspan="2">1</td> <td colspan="4"></td> </tr> </table>												Лит.	Лист	Листов								1																													
Лит.	Лист	Листов																																																		
		1																																																		
Инв. № подл.	<p style="font-size: 1.2em; font-weight: bold;">Задача 16</p> <p style="font-size: 1.2em; font-weight: bold;">Вариант 31</p>																																																			
Инв. № подл.					<p style="font-size: 1.2em; font-weight: bold;">группа 300</p>																																															
Копировал					Формат А4																																															

Рисунок 83 – Пример решения задания по Алгоритму 22.4

23 Определение линии пересечения тела плоскостью

Вопросы пересечения тел плоскостями и взаимного пересечения тел весьма многосторонни. В данном пособии авторы ограничились только теми темами, которые важны для решения обязательных заданий: пересечение многогранников, конусов и цилиндров.

23.1 Сечение плоскостью частного положения

Все, что содержит проецирующая плоскость, отображается на ее проецирующий след. Это относится и к линии пересечения. Поэтому построение линии пересечения тела проецирующей плоскостью сводится к выделению ее проекции на проецирующем следе и использовании проекционных связей для определения другой проекции или проекций.

23.1.1 Пересечение с призмами и пирамидами

Линия пересечения гранных тел – ломаная, состоящая из отрезков прямых линий. Поэтому для ее нахождения достаточно определить точки излома – пересечение с ребрами тела.

23.1.1.1 Выделить проекцию линии пересечения на проецирующем следе. Обозначить точки пересечения с ребрами многогранника.

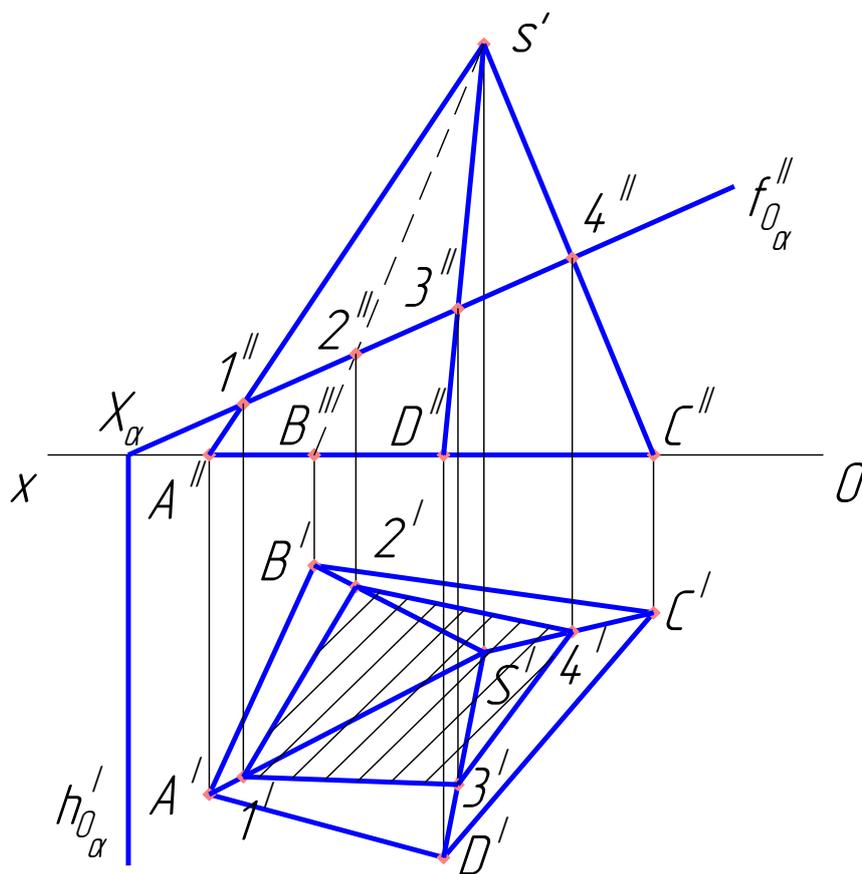


Рисунок 84 – Пересечение пирамиды с фронтально проецирующей плоскостью

Построим в проекционной связи горизонтальные проекции этих точек, обозначая их на соответствующих ребрах: $1'$ на $S'A'$, $2'$ на $S'B'$, $3'$ на $S'D'$ и $4'$ на $S'C'$. На горизонтальной плоскости проекций все грани пирамиды видимы, поэтому все проекции отрезков линии пересечения $1'2'3'4'$ соединены основной сплошной линией.

23.1.1.2 С помощью проекционных связей перенести точки излома на ребрах на другую проекцию.

23.1.1.3 Соединить проекции отрезков линии пересечения, принадлежащие граням тела, с учетом их видимости.

На рисунке 84 показан пример построения сечения пирамиды фронтально проецирующей плоскостью. Сечение призмы строится аналогичным образом.

Пирамиду $SABCD$ рассекает фронтально-проецирующая плоскость α . На фронтальную плоскость проекций линия пересечения проецируется на след f''_{α} . Обозначим точки пересечения ребер с заданной плоскостью. На фронтальной проекции это следующие точки: $1''$ на $S''A''$, $2''$ на $S''B''$, $3''$ на $S''D''$ и $4''$ на $S''C''$.

23.1.2 Пересечение с конусами

Как известно, в зависимости от положения секущей плоскости коническую поверхность можно пересечь по двум прямым, параболе, гиперболе, окружности или эллипсу. Как следствие, при пересечении конуса получается либо замкнутая эллиптическая кривая, либо ломаная, объединяющая в себе фрагмент одной из упомянутых гладких кривых и отрезок прямой (если плоскость проходит через основание тела), либо, наконец, треугольник (если плоскость пересекает и основание, и вершину конуса).

Один из возможных методов приближенного решения – определение точек пересечения с произвольными образующими конуса.

23.1.2.1 Выделить проекцию линии пересечения на проецирующем следе. Обозначить точки пересечения с основанием тела, если таковые имеются.

23.1.2.2 Построить в плоскости проецирующего следа образующие, на которых изменяется видимость фигуры сечения, и ряд произвольных образующих, так чтобы их общее количество составило 8-10 шт. Отметить точки пересечения проецирующего следа с проекциями построенных образующих.

23.1.2.3 С помощью проекционных связей перенести точки пересечения с образующими и основанием на вторую проекцию.

23.1.2.4 Последовательно соединить точки пересечения с образующими лекальной кривой, а с основанием – отрезком прямой. Учесть изменение видимости при переходе через крайние образующие.

На рисунке 85 наклонный конус пересекается горизонтально-проецирующей плоскостью α . Она пересекает как боковую поверхность, так и основание тела.

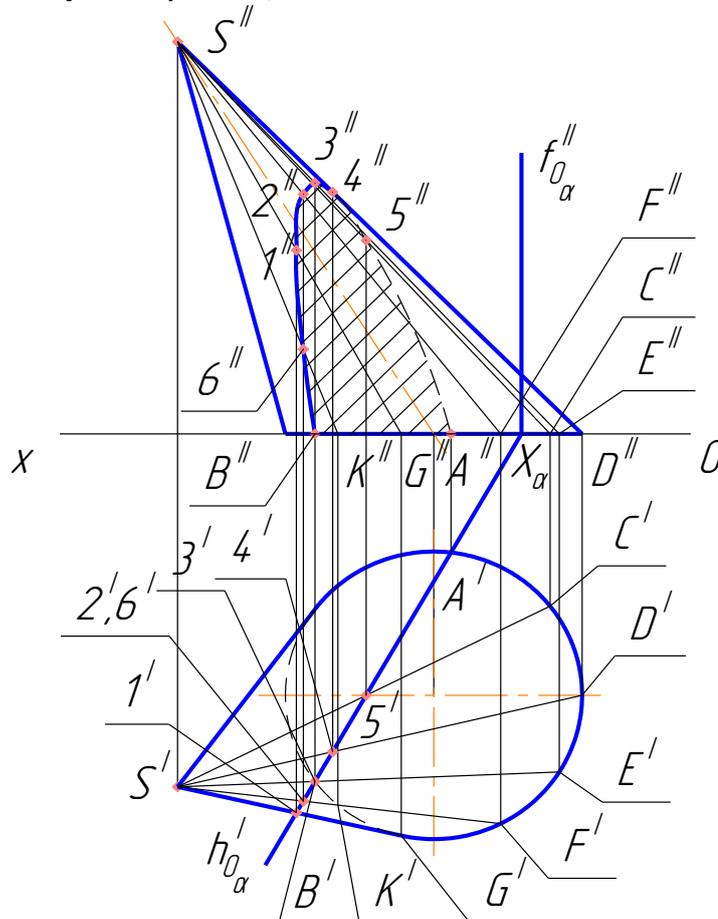


Рисунок 85 – Пересечение наклонного конуса с горизонтально проецирующей плоскостью

Обозначим на горизонтальной плоскости проекций точки пересечения с основанием как A' и B' . Для определения линии пересечения с боковой поверхностью спроецируем на плоскость π_1 крайнюю образующую SD и проведем ряд промежуточных образующих SC , SE , SF , SG и SK . Обозначим на их горизонтальных проекциях точки пересечения со следом $h'_{0\alpha}$. На отрезке $S'C'$ находится точка $5'$, на $S'D' - 4'$, на $S'E' - 3'$, на $S'F' - 2'$, на $S'G' - 1'$ и на $S'K'$, проецирующемся на ту же линию, что и $S'F'$, - точка $6'$.

С помощью проекционных связей перенесем точки линии пересечения $1'-6'$ на соответствующие фронтальные проекции образующих, а точки A'' и B'' отметим на фронтальной проекции основания конуса. Видимость линии пересечения меняется при переходе через крайнюю образующую $S''D''$, т.е. в точке $4''$. Участок $A''5''4''$ находится на невидимой части конуса, обозначим его линией невидимого контура, тогда как видимый участок $B''6''1''2''3''4''$ очерчиваем основной сплошной линией. Отрезок $A''B''$ в основании конуса невидим, но он перекрывается видимым краем основания конуса.

23.1.3 Пересечение с цилиндрами

В зависимости от положения секущей плоскости цилиндрическая поверхность пересекается по двум прямым, окружности или по эллиптической кривой. При пересечении с наклонным или прямым цилиндром в сечении могут участвовать основания. Это приведет к получению в качестве линии пересечения замкнутой ломаной, в которой будут присутствовать один или два прямых участка.

Определение линии пересечения цилиндра проецирующей плоскостью может быть выполнено с помощью промежуточных образующих, по тому же Алгоритму 23.1.2, что был описан для конусов. Пример таких построений показан на рисунке 86, а.

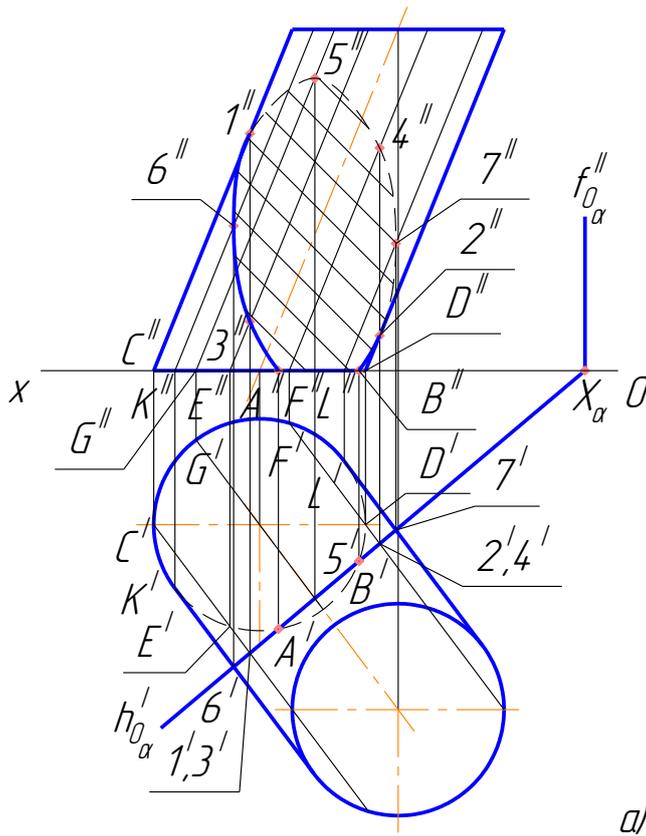
Наклонный цилиндр пересекает горизонтально проецирующая плоскость α . Следовательно, в плоскости π_1 линия пересечения лежит на проецирующем следе между точками $6'$ и $7'$ на крайних образующих (они обозначены точками K' и L' в нижнем основании цилиндра). Кроме боковой поверхности, плоскость α пересекает основание цилиндра по отрезку, горизонтальная проекция которого обозначена как $A'B'$.

Для уточнения вида кривой, получающейся в сечении боковой поверхности, построим в горизонтальной плоскости проекций еще ряд образующих: прежде всего, крайние образующие на фронтальной плоскости проекций, опирающиеся на точки C' и D' , а также образующие, проходящие через точки E' , G' и F' . Эти линии пересекаются со следом $h'_{0\alpha}$ в точках $1'$, $2'$, $3'$, $5'$ и $4'$, соответственно.

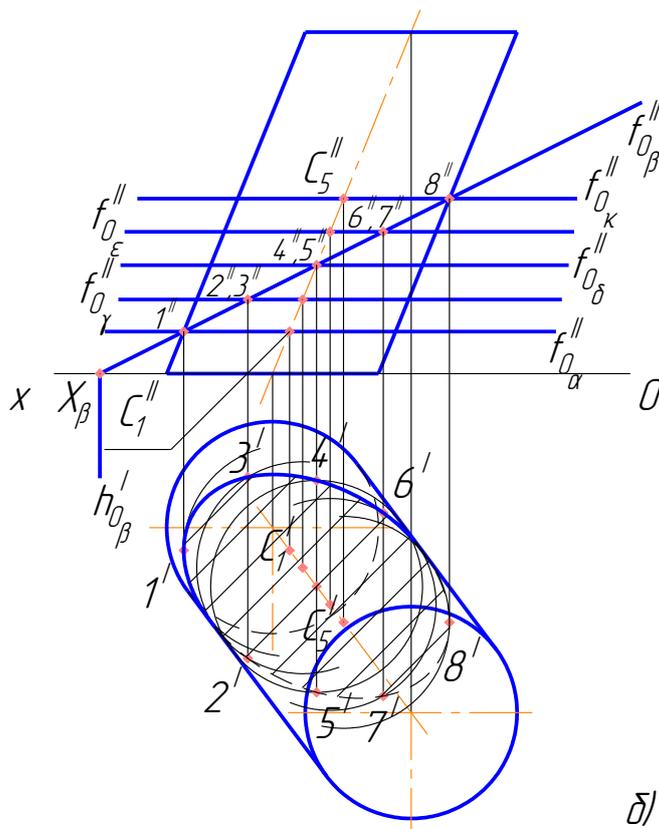
Спроецируем точки линии пересечения на построенные фронтальные проекции перечисленных образующих. Отрезок $A''B''$ лежит в основании цилиндра и перекрыт его ближним видимым краем. Построенные на боковой поверхности точки позволяют провести через них лекальную кривую $A''3''6''1''5''4''7''2''B''$. Видимость этого фрагмента эллипса изменяется в точках $1''$ и $2''$, причем участки $A''3''6''1''$ и $2''B''$ – видимые, участок $1''5''4''7''2''$ представлен линией невидимого контура.

Если проецирующий след проходит в той же плоскости проекций, в которой цилиндр виден со стороны боковой поверхности, тем самым определены крайние точки линии сечения, и построение может быть выполнено с помощью вспомогательных секущих плоскостей.

- 23.1.3.1 Выделить проекцию линии пересечения на проецирующем следе. Обозначить точки пересечения с основанием или основаниями тела, если таковые имеются.
- 23.1.3.2 В плоскости проекций, на которую проецирует заданная плоскость, провести ряд следов плоскостей уровня, параллельных другой плоскости проекций, в пределах выделенной линии пересечения.
- 23.1.3.3 Для каждой из плоскостей уровня выполнить следующие построения:
 - обозначить точку или точки, лежащие на пересечении проецирующего следа заданной плоскости и следа плоскости уровня;
 - во второй плоскости проекций найти линию пересечения плоскостью уровня цилиндрической поверхности – окружность с центром, положение которого



a)



b)

Рисунок 86 – Определение линии пересечения проецирующей плоскости с наклонным цилиндром:
 а) с помощью образующих; б) за счет вспомогательных секущих плоскостей

определяется в проекционной связи с точкой пересечения следом плоскости уровня оси цилиндра; спроецировать на эту окружность точку или точки линии пересечения.

23.1.3.4 Соединить полученные точки линии пересечения на боковой поверхности конуса лекальной кривой или кривыми, а спроецированные на эту же плоскость точки на основаниях, если таковые имеются, отрезками прямых, учитывая видимость участков.

На рисунке 86, б фронтально-проецирующая плоскость β пересекает наклонный цилиндр. Этот цилиндр лежит своим основанием в плоскости π_1 . Такое взаимное положение тела и секущей плоскости позволяет без дополнительных построений определить верхнюю и нижнюю точки сечения. В плоскости проекций π_2 линия пересечения находится на проецирующем следе, между точками $1''$ и $8''$ на крайних образующих.

Рассечем цилиндр рядом вспомогательных плоскостей, параллельных горизонтальной плоскости проекций, в пределах линии пересечения с плоскостью β . Их фронтальные следы обозначены $f''_{0a}, f''_{0\gamma}, f''_{0\delta}, f''_{0\epsilon}$ и $f''_{0\kappa}$. Первая и последняя плоскость проходят через точки $1''$ и $8''$. Остальные плоскости занимают промежуточное положение и дают по две точки на линии пересечения: на ближней (видимой) и дальней (невидимой) образующих. Каждая из вспомогательных секущих плоскостей пересекает цилиндр по окружности с центром,

проецирующимся на его ось. На рисунке 69, б обозначены центры только двух окружностей C_1 и C_5 , лежащих, соответственно, в плоскостях α и κ .

Поясним порядок построений для одной из плоскостей. Плоскость α пересекает наклонный цилиндр по окружности, фронтальная проекция центра которой – точка C''_1 . Спроецируем ее на горизонтальную плоскость проекций на ось цилиндра, получим точку C'_1 . С центром в этой точке построим дугу окружности с радиусом, равным радиусу оснований цилиндра. С помощью проекционной связи на этой дуге найдем точку, принадлежащую линии пересечения с плоскостью β , – точку I' . Аналогичным образом построены другие 7 точек на четырех вспомогательных плоскостях.

Построенные в плоскости π_1 точки $I' - 8'$ соединены лекальной кривой. Точки $I', 3', 4'$ и $6'$ лежат на видимой части линии пересечения, точки $2', 5', 7'$ и $8'$ принадлежат невидимой части эллипса. Видимость меняется на крайних образующих. В данном случае положение точек изменения видимости определено приближенно. Для точного их выявления необходимо прибегнуть к методу образующих.

23.1.4 Пересечение с профильно проецирующей плоскостью

Целый ряд задач приучил нас к тому, что для их решения достаточно использовать всего две плоскости проекций. Однако в этом случае придется прибегнуть к построениям в профильной плоскости проекций.

23.1.4.1 Ввести координатные оси Oy и Oz и спроецировать заданное тело на профильную плоскость проекций.

23.1.4.2 Построить профильный след секущей плоскости (Алгоритм 10.2).

23.1.4.3 Обозначить линию пересечения на профильно проецирующем следе и построить ее фронтальную проекцию, решая задачу во фронтальной и профильной плоскостях проекций, пользуясь одним из описанных выше Алгоритмов 23.1.1 – 23.1.3.

23.1.4.4 Найти горизонтальную проекцию линии пересечения в проекционной связи с построенными ранее проекциями.

Этот Алгоритм проиллюстрирован рисунком 87 на примере определения линии пересечения профильно проецирующей плоскостью прямого цилиндра.

Закрепим в произвольном месте оси ординат начало координат O и вычертим оси Oy и Oz . С помощью проекционной связи найдем положение центра нижнего основания цилиндра в профильной плоскости проекций. В привязке к нему вычертим профильную проекцию цилиндра, конгруэнтную его фронтальной проекции. Определим величины координат секущей плоскости Y_α и Z_α , перенесем Y_α на ось Oy профильной плоскости проекций и вычертим профильный, проецирующий след плоскости p'''_{α} .

Профильная проекция линии пересечения совпадает со следом p'''_{α} и ограничена точками $1'''$ и $2'''$ на крайних образующих цилиндра (они обозначены точками A''' и B''' в основании). Проведем еще ряд образующих: проецирующиеся на ось вращения образующие обозначим точками C''' и D''' ; кроме того, на равном расстоянии от них проведем пары образующих, обозначенных точками E''' , F''' и K''' , L''' , соответственно. Такой выбор образующих позволяет сократить объем построений. На перечисленных образующих лежат соответствующие точки линии пересечения: $3'''$, $4'''$, $5'''$, $6'''$, $7'''$ и $8'''$.

На горизонтальной проекции линия пересечения совпадает с очерком оснований цилиндра. На фронтальной плоскости были построены проекции упомянутых образующих и на них с помощью проекционных связей, были перенесены точки линии пересечения. Крайними на фронтальной проекции цилиндра являются образующие опирающиеся на точки C''' и D''' . Поэтому видимость линии пересечения меняется в лежащих на них точках $3'''$ и $4'''$. Видимым является участок линии пересечения на обращенной к нам половине цилиндра – $3'''5'''2'''6'''4'''$; участок $4'''8'''1'''7'''3'''$ – невидим и обозначен штриховой линией.

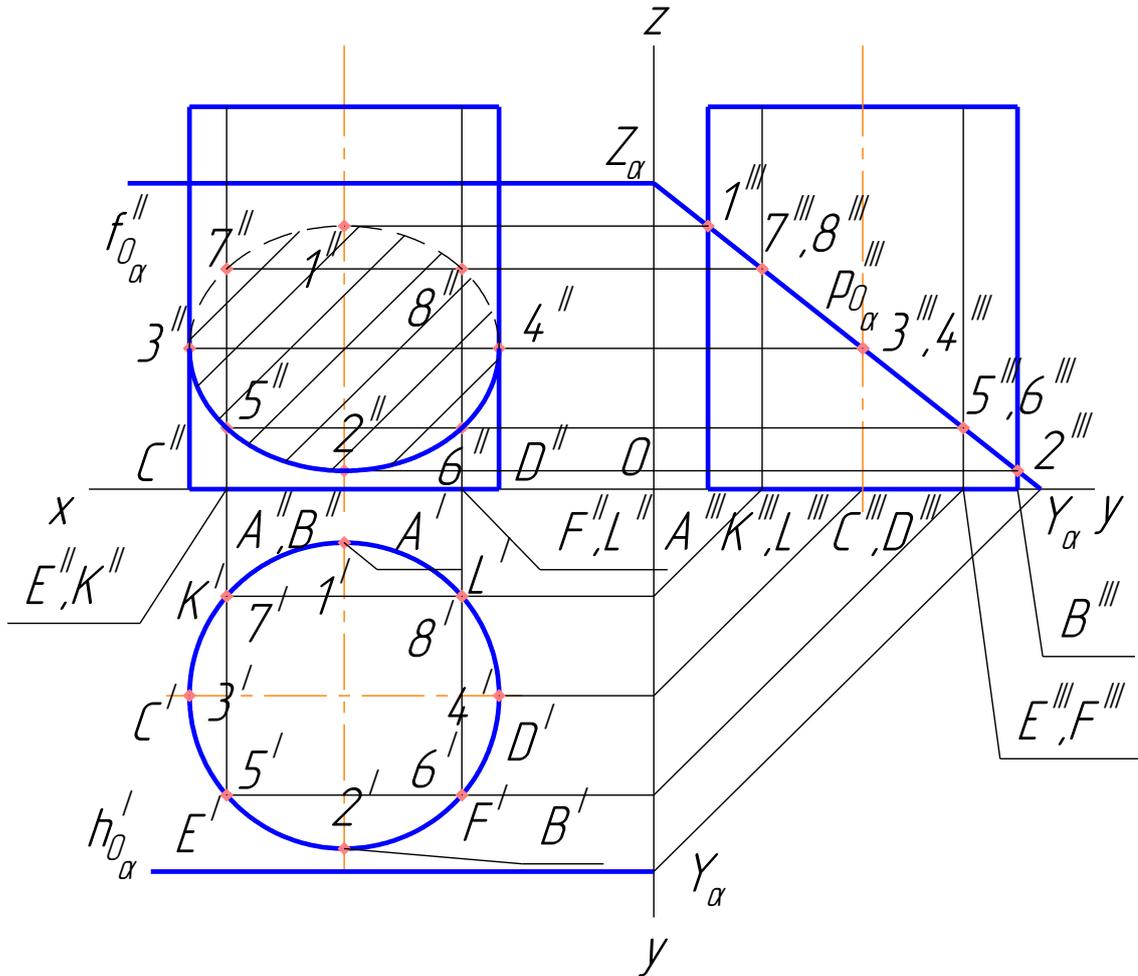


Рисунок 87 – Пересечение прямого цилиндра с профилно проецирующей плоскостью

23.2 Сечение плоскостью общего положения

23.2.1 Решение с применением метода ППП

Общий способ решения состоит в преобразовании плоскости общего положения в плоскость частного положения и сведении задачи к одному из ранее рассмотренных Алгоритмов:

23.2.1.1 Преобразовать плоскость в горизонтально или фронтально проецирующую (Алгоритм 18.3.1).

23.2.1.2 Построить проекцию тела в преобразованной плоскости проекций (Алгоритм 18.1.1).

23.2.1.3 Найти линию пересечения тела плоскостью в новой системе плоскостей проекций (Алгоритм 23.1).

23.2.1.4 Построить линию пересечения тела в исходной плоскости проекций, используя проекционные связи. Определить ее видимость.

На рисунке 88 плоскость общего положения α пересекает призму $ABDCKLRS$. Новая ось π_4/π_1 проведена под прямым углом к следу $h'_{0\alpha}$, что позволяет преобразовать плоскость α во фронтально-проецирующую.

В измененной плоскости проекций π_4 линия пересечения совпадает со следом плоскости $f^V_{0\alpha}$. Она представляет собой замкнутую ломаную линию, вершины которой лежат на сторонах призмы. Обозначаем их $1^{IV}, 2^{IV}, 3^{IV}, 4^{IV}$ на сторонах $A^{IV}K^{IV}, C^{IV}S^{IV}, B^{IV}L^{IV}$ и $D^{IV}R^{IV}$, соответственно.

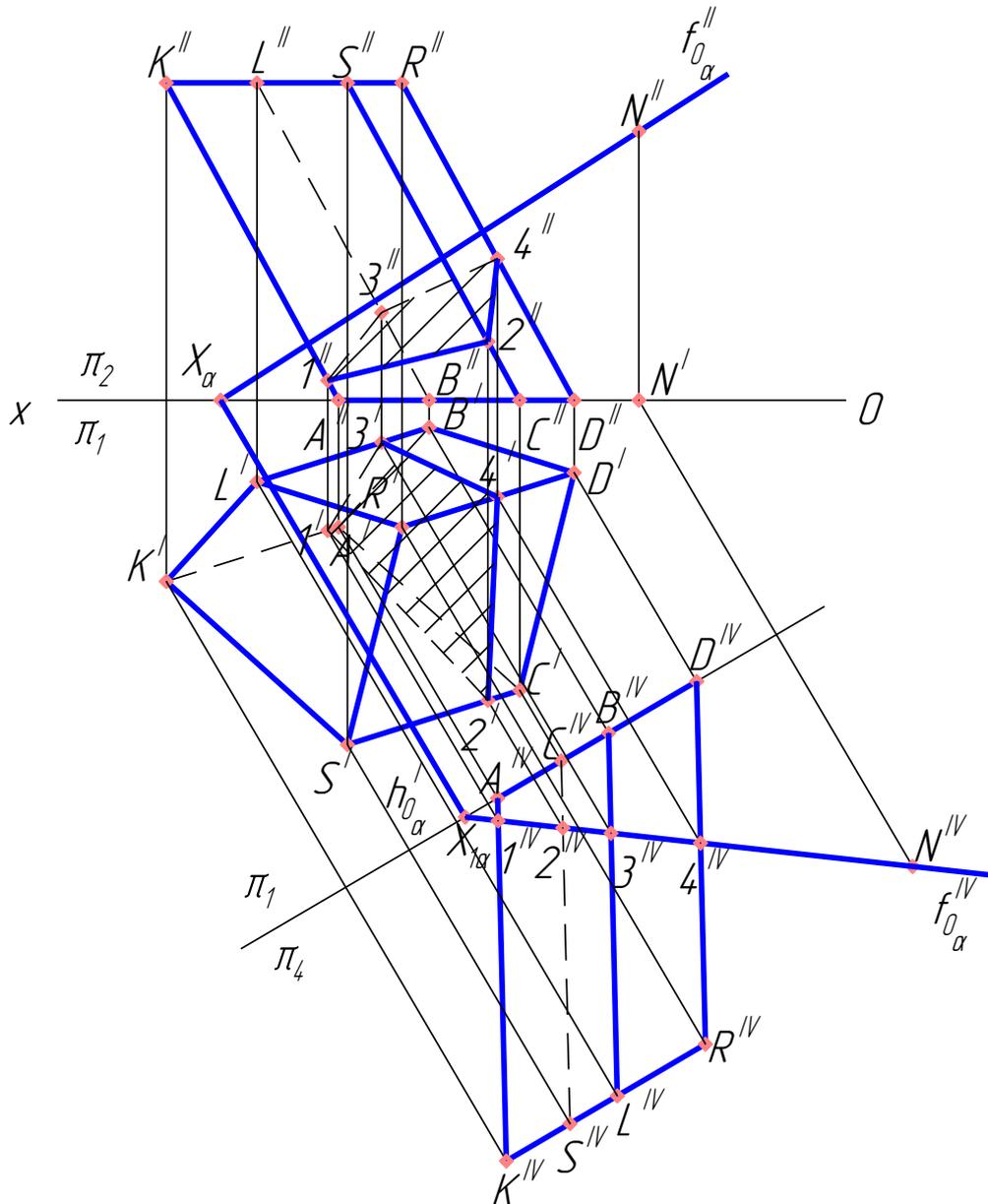


Рисунок 88 – Определение линии пересечения наклонной призмы плоскостью общего положения с применением метода перемены плоскостей проекций

Проекционные связи, проведенные под прямым углом к оси π_4/π_1 , позволяют найти горизонтальную проекцию линии пересечения – четырехугольник $1'3'4'2'$. Его стороны $1'2'$ и $1'3'$ принадлежат невидимым граням призмы, поэтому проводим их линией невидимого контура. С помощью проекционных связей находим исходную фронтальную проекцию линии пересечения – $1''3''4''2''$. Во фронтальной плоскости проекций невидимо ребро $B''L''$, как следствие, отрезки $1''3''$ и $3''4''$ прочерчиваем линией невидимого контура.

23.2.2 Решение с помощью вспомогательных секущих плоскостей

В том случае, если рассекается многогранник, прямой круговой конус или цилиндр, решение может быть найдено в заданных проекциях. Линия пересечения для призмы или пирамиды может быть найдена многократным применением Алгоритма 17.1 для определения точек встречи ребер многогранника с заданной плоскостью. Для конуса и цилиндра линия пересечения с боковой поверхностью может быть найдена в соответствии со следующим Алгоритмом:

- 23.2.2.1 Построить проходящую через ось вращения тела проецирующую плоскость, содержащую линию наибольшего наклона секущей плоскости. Она должна быть перпендикулярна основанию тела вращения, и ее проецирующий след должен составлять прямой угол с одноименным следом заданной секущей плоскости.
- 23.2.2.2 Найти линию пересечения проецирующей плоскости с заданной (Алгоритм 16.1.1).
- 23.2.2.3 Вычертить образующие, по которым вспомогательная проецирующая плоскость рассекает тело вращения.
- 23.2.2.4 Определить точки пересечения линий, построенных в соответствии с пп. 23.2.2.2 и 23.2.2.3. Они являются верхней и нижней точками линии пересечения боковой поверхности тела вращения с секущей плоскостью.
- 23.2.2.5 Провести вспомогательную плоскость, содержащую крайние образующие тела вращения. Это – плоскость уровня, параллельная той же плоскости проекций, к которой параллельна ось вращения тела.
- 23.2.2.6 Построить линию пересечения этой вспомогательной плоскости с заданной секущей плоскостью (Алгоритм 16.1.2).
- 23.2.2.7 Обозначить точки пересечения этой линии с крайними образующими тела вращения. В этих точках будет меняться видимость искомой линии пересечения в одной из плоскостей проекций.
- 23.2.2.8 В промежутке между крайними точками сечения провести ряд вспомогательных плоскостей уровня, перпендикулярных оси тела вращения (их количество зависит от необходимой точности решения). Они пересекут тело по окружностям соответствующего радиуса.
- 23.2.2.9 Найти линии пересечения этих вспомогательных плоскостей с заданной секущей плоскостью (Алгоритм 16.1.2).
- 23.2.2.10 Обозначить точки пересечения каждой из линий, построенных согласно п. 23.2.2.9, с каждой из соответствующих (лежащих в одной с ними плоскости) окружностей, которые были вычерчены в п. 23.2.2.8. Эти точки принадлежат искомой линии пересечения.
- 23.2.2.11 Недостающие проекции построенных точек линии пересечения определить с помощью проекционных связей.
- 23.2.2.12 Соединить проекции искомой линии пересечения лекальными кривыми с учетом видимости их участков.

На рисунке 89 изложенный Алгоритм проиллюстрирован построением линии пересечения прямого кругового конуса плоскостью общего положения α .

Линия пересечения будет представлять собой плоскую ломаную состоящую из прямолинейного участка $I2$, полученного в результате рассечения основания конуса, и части кривой, принадлежащей боковой поверхности конуса. Фигура пересечения будет симметричной относительно плоскости, проходящей через ось вращения конуса. Построим ее: эта плоскость β будет горизонтально проецирующей, причем след $h'_{об}$ будет проходить через точку S' (проекцию вершины конуса) под прямым углом к следу h'_{α} . Найдем линию пересечения плоскостей α и β . Следы плоскостей пересекаются в пределах чертежа, их вторые проекции лежат на оси Ox . Построенная линия пересечения NM одновременно является линией наибольшего ската плоскости α , а следовательно, содержит верхнюю и нижнюю точку линии пересечения с боковой поверхностью. Фронтальная проекция верхней точки сечения лежит на пересечении $M''N''$ с образующей $S''A''$, - одной из образующих, по которым плоскость β рассекает конус. Ее горизонтальная проекция найдена в проекционной связи. Нижняя точка кривой сечения не определялась, так как она лежит за пределами заданного тела.

Найдем точки (или точку) изменения видимости фронтальной проекции линии пересечения конуса с плоскостью α . Для этого проведем вспомогательную фронтальную плоскость γ , проходящую через ось вращения конуса. Она рассекает плоскость α по фронтале M_1A_1 .

Пересечение ее фронтальной проекции с проекцией крайней образующей $S''B''$ дает нам точку изменения видимости $4''$.

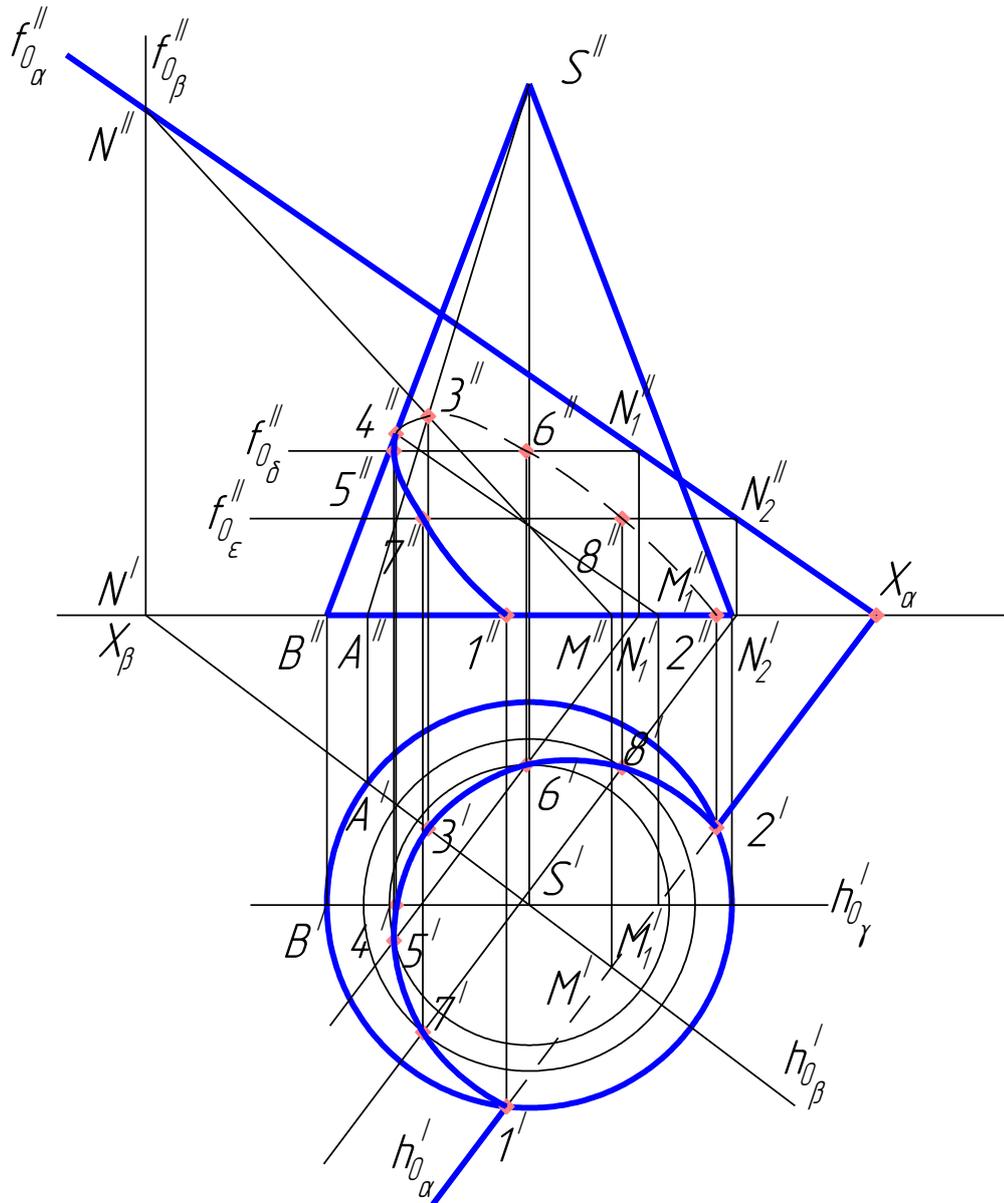


Рисунок 89 – Определение линии пересечения прямого кругового конуса с плоскостью общего положения с помощью вспомогательных секущих плоскостей

После того как найдены ключевые точки на линии пересечения, перейдем к определению промежуточных точек, уточняющих ее форму. Проведем ниже крайней верхней точки сечения вспомогательную горизонтальную плоскость δ . Она рассекает конус по окружности с радиусом, равным расстоянию от оси вращения до крайней образующей, измеренному по следу f''_{δ} . Линия пересечения плоскостей α и δ представляет собой горизонталь плоскости α . Пересечение ее горизонтальной проекции N'_1S' с упомянутым сечением конуса позволяет получить точки $5'$ и $6'$, принадлежащие горизонтальной проекции искомой линии пересечения. Их фронтальные проекции $5''$ и $6''$ лежат в проекционной связи на следу f''_{δ} . Аналогично, с помощью горизонтальной плоскости ϵ находим лежащие на линии пересечения α с конусом точки 7 и 8 .

Определяем видимость проекций линии пересечения. На горизонтальной плоскости проекций виден весь криволинейный участок, а отрезок $1'2'$ в основании конуса обозначен линией невидимого контура. На фронтальной плоскости проекций на видимой половине конуса находится участок $1''7''5''4''$, участок $4''3''6''8''2''$ невидим. Отрезок $1'2'$ в основании не виден, но он перекрыт видимой линией, в которую проецируется окружность основания конуса.

23.3 **Определение линии пересечения с построением истинной величины фигуры сечения**

Построение линии пересечения тела плоскостью является основным компонентом Задачи 17, входящей в комплект обязательных домашних заданий. Кроме того, требуется еще построить истинную величину фигуры сечения. Примеры решения таких заданий приведены на рисунках 90 и 91.

Линия пересечения строится по одному из вышеизложенных Алгоритмов 23.1 или 23.2. Истинная величина плоской фигуры определяется согласно наиболее оптимальному из изученных Алгоритмов 18.4, 19.2 или 20.2.

На рисунке 90 приведен пример решения одной из задач № 17, в которой требовалось построить линию пересечения пирамиды плоскостью общего положения. Линия пересечения была найдена в соответствии с Алгоритмом 23.2.1, с помощью метода перемены плоскостей проекций. Поскольку в измененной фронтальной плоскости проекций линия пересечения $A^{IV}I^{IV}3^{IV}2^{IV}$ проецировалась в одну линию, то для построения истинной величины фигуры сечения потребовалась еще одна перемена плоскостей проекций. Ось абсцисс π_4/π_5 была проведена параллельно этой измененной фронтальной проекции линии пересечения, и в новой горизонтальной плоскости проекций была получена истинная величина четырехугольника $A^*I^*3^*2^*$.

На рисунке 91 показано решение одного из вариантов задач № 17, в котором требовалось построить линию пересечения наклонного цилиндра плоскостью частного положения. Линия пересечения была построена согласно Алгоритму 22.1.2, за счет определения точек встречи заданной плоскости с образующими цилиндрической поверхности. Фигура сечения состоит из двух участков – криволинейного (на боковой поверхности цилиндра) и отрезка прямой, лежащего в верхнем основании цилиндра. Истинная величина фигуры сечения была найдена с помощью вращения относительно фронтального следа плоскости f''_{0a} . В результате этой операции плоскость сечения была совмещена с плоскостью π_2 (см. Алгоритм 18).

24 **Точки встречи прямой с поверхностью**

Общий способ решения задач на определение точек встречи прямых с поверхностями состоит в последовательном выполнении следующих действий: через прямую проводится вспомогательная секущая плоскость; определяется линия пересечения этой плоскости с заданной поверхностью; находятся точки пересечения найденной линии пересечения с заданной прямой.

24.1 **Определение точек пересечения с многогранниками**

В случае поиска точек встречи с призмами и пирамидами в качестве вспомогательной может быть выбрана проецирующая плоскость.

24.1.1 Заключить прямую в проецирующую плоскость, т.е. провести проецирующий след через одноименную проекцию прямой. Другие следы вспомогательной плоскости для решения не потребуются.

24.1.2 Найти линию пересечения многогранника с вспомогательной плоскостью (Алгоритм 23.1.1).

24.1.3 Обозначить точки пересечения проекции прямой, через которую не проводился след вспомогательной плоскости, с одноименной проекцией фигуры сечения. Это и будут проекции искомых точек встречи.

24.1.4 Найти вторые проекции точек встречи на соответствующей проекции заданной прямой с помощью проекционных связей.

24.1.5 Определить видимость участков прямой с учетом видимости граней и взаимного положения тела и прямой относительно плоскостей проекций.

Перв. примен.									
Справ. №									
Подп. и дата	Инд. № докл.	Взам. инв. №	Подп. и дата						
Инд. № подл.	Изм. Лист	№ докум.	Подп. Дата						
	Разраб.	Гнилицша	15.11.15						
	Пров.	Лютарович							
	Н.контр.								
	Утв.								
<p>Построить проекции линии пересечения поверхности плоскостью. Определить истинную величину сечения.</p>			<p>Задача № 17 Вариант 31</p>						
			<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 33%;">Лит.</td> <td style="width: 33%;">Лист</td> <td style="width: 33%;">Листов</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">2</td> </tr> </table>	Лит.	Лист	Листов		1	2
Лит.	Лист	Листов							
	1	2							
Копировал			группа 300						
			Формат А4						

Рисунок 90 – Пример оформления задания, в котором требовалось построить линию пересечения пирамиды плоскостью общего положения и истинную величину фигуры сечения

Перв. примен.																												
Справ. №																												
Подп. и дата	<p>Построить проекции линии пересечения поверхности плоскостью. Определить истинную величину сечения.</p>																											
Инд. № дубл.																												
Взам. инв. №	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 15%;">Изм.</td> <td style="width: 15%;">Лист</td> <td style="width: 20%;">№ докум.</td> <td style="width: 15%;">Подп.</td> <td style="width: 35%;">Дата</td> </tr> <tr> <td>Разраб.</td> <td></td> <td>Гнилуша</td> <td></td> <td>15.11.15</td> </tr> <tr> <td>Пров.</td> <td></td> <td>Лютарович</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Н.контр.</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Утв.</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>			Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Разраб.		Гнилуша		15.11.15	Пров.		Лютарович			Н.контр.					Утв.				
Изм.				Лист	№ докум.	Подп.	Дата																					
Разраб.		Гнилуша		15.11.15																								
Пров.		Лютарович																										
Н.контр.																												
Утв.																												
Подп. и дата	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 33%;">Лит.</td> <td style="width: 33%;">Лист</td> <td style="width: 34%;">Листов</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">1</td> </tr> </table>			Лит.	Лист	Листов			1																			
Лит.	Лист	Листов																										
		1																										
Инд. № подл.	<p style="font-size: 1.2em; font-weight: bold;">Задача № 17</p> <p style="font-size: 1.2em; font-weight: bold;">Вариант 32</p>																											
	<p style="font-size: 1.2em; font-weight: bold;">группа 300</p>																											
	<p>Копировал _____ Формат А4</p>																											

Рисунок 91 – Пример оформления задания, в котором требовалось построить линию пересечения наклонного цилиндра плоскостью частного положения и истинную величину фигуры сечения

На рисунке 92 этот Алгоритм проиллюстрирован поиском точек встречи прямой с пирамидой, в основании которой лежит четырехугольник.

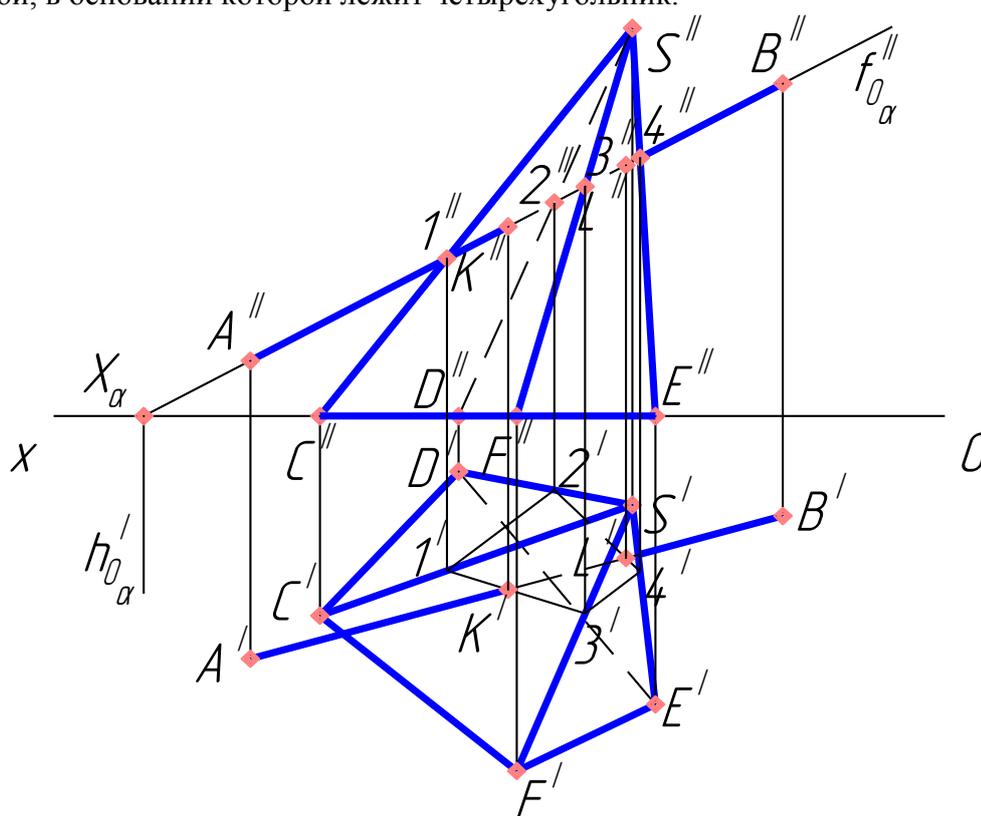


Рисунок 92 – Точки встречи прямой с пирамидой

Для решения воспользуемся фронтально проецирующей плоскостью. Проведем ее фронтальный след $f''_{0\alpha}$ через фронтальную проекцию прямой $A''B''$. Он пересекает проекции боковых ребер пирамиды в точках $1''$, $2''$, $3''$ и $4''$. Горизонтальные проекции этих точек находим в проекционной связи на отрезках $S'C'$, $S'D'$, $S'F'$ и $S'E'$, соответственно.

Фигура сечения 1234 и прямая AB лежат в одной плоскости α . Поэтому точки пересечения их горизонтальных проекций являются точками пересечения самих элементов. С другой стороны, отрезки фигуры сечения принадлежат боковым граням пирамиды. Поэтому полученные при пересечении точки K' и L' являются горизонтальными проекциями искомых точек встречи. Фронтальные проекции K'' и L'' находим в проекционной связи на $A''B''$.

Определяем видимость прямой относительно пирамиды. На горизонтальной плоскости проекций точка K' лежит на видимой грани пирамиды $S'C'F'$, а точка L' – на невидимой грани $S'D'E'$. Поэтому видимым является участок $A'K'$, затем на участке $K'L'$ прямая находится внутри тела, но видимой она становится только после выхода из-за крайнего ребра $S'E'$. Видимость граней на фронтальной плоскости аналогична, что, в результате подобных рассуждений, позволит нам сходным образом отметить видимость участков фронтальной проекции прямой $A''B''$.

24.2 Построение точек пересечения с конусами

В общем случае использование вспомогательной проецирующей плоскости не позволит получить точного положения искомой точки. Поэтому для решения следует построить плоскость общего положения, проходящую через вершину конуса.

24.2.1 Провести одну из проекций прямой, проходящей через вершину конуса и пересекающей заданную прямую.

24.2.2 Найти вторую проекцию вспомогательной прямой, построив в проекционной связи проекцию точки пересечения прямых.

- 24.2.3 Определить точки пересечения заданной и вспомогательной прямых с плоскостью проекций, содержащей основание конуса (Алгоритм 8.1.1).
- 24.2.4 Провести через одноименные следы прямых след вспомогательной плоскости, пересекающий основание конуса.
- 24.2.5 Вычертить в этой же плоскости проекций треугольник – проекцию фигуры сечения конуса вспомогательной плоскостью.
- 24.2.6 Обозначить точки пересечения одноименной проекции прямой с этой проекцией фигуры сечения. Это и будут проекции искомых точек встречи.
- 24.2.7 Найти вторые проекции точек встречи на соответствующей проекции заданной прямой с помощью проекционных связей.
- 24.2.8 Определить видимость участков прямой с учетом видимости конуса и взаимного положения тела и прямой относительно плоскостей проекций.

На рисунке 93 прямая AB пересекает конус, лежащий своим основанием в горизонтальной плоскости проекций. Прямая занимает общее положение, поэтому если заключить ее во вспомогательную проецирующую плоскость, фигура сечения будет криволинейной, строящейся приближенно, а значит, мы не сможем найти точное положение точек встречи. Будем проводить решение по предложенному Алгоритму.

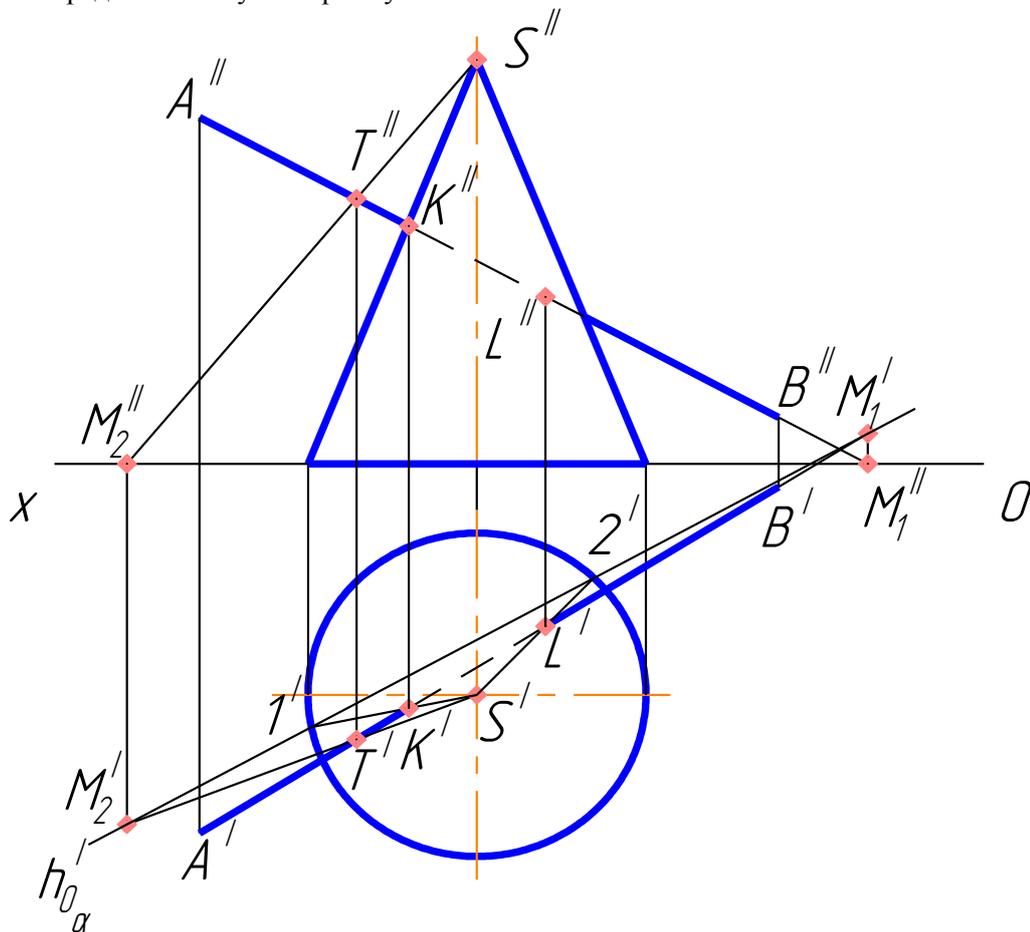


Рисунок 93 – Точки встречи прямой с конусом

Пересечем заданную прямую вспомогательной прямой ST : ее фронтальную проекцию проведем произвольно, а горизонтальную прочертим через лежащую в проекционной связи на $A'B'$ точку T' . Продлим фронтальные проекции заданной и вспомогательной прямых $A''B''$ и $S''T''$ до пересечения с осью Ox . В этих точках находятся фронтальные проекции горизонтальных следов прямых. Их горизонтальные проекции M'_1 и M'_2 находим в проекционной связи на продолжении отрезков $A'B'$ и $S'T'$, соответственно. Проведем через них горизонтальный след

вспомогательной плоскости $h'_{0\alpha}$, проходящей через вершину конуса. Эта плоскость рассекает конус по треугольнику с горизонтальной проекцией $S'I'2'$. Горизонтальная проекция прямой $A'B'$ пересекается с отрезками $S'I'$ и $S'2'$ в точках K' и L' . Это – горизонтальные проекции искомых точек встречи. Фронтальные проекции K'' и L'' находим на $A''B''$ в проекционной связи.

Определяем видимость прямой относительно конуса. На горизонтальной плоскости проекций вся боковая поверхность конуса видима. Поэтому линией невидимого контура обозначаем только участок $K'L'$, находящийся внутри конуса. Во фронтальной плоскости проекций точка K'' находится на видимой, а точка L'' – на невидимой образующей конуса. Поэтому участок $A''K''$ является видимым, а далее прямая будет видна только после появления из-за крайней образующей конуса.

24.3 Определение точек пересечения с цилиндрами

Как и для конуса, для прямой общего положения использование вспомогательной проецирующей плоскости не позволит получить точного положения искомой точки. Поэтому для решения следует построить плоскость общего положения, параллельную образующей цилиндрической поверхности.

- 24.3.1 Провести одну из проекций прямой, параллельной образующей цилиндра и пересекающей заданную прямую.
- 24.3.2 Найти вторую проекцию вспомогательной прямой, построив в проекционной связи проекцию точки пересечения прямых.
- 24.3.3 Определить точки пересечения заданной и вспомогательной прямых с плоскостью проекций, содержащей основание цилиндра (Алгоритм 8.1.1).
- 24.3.4 Провести через одноименные следы прямых след вспомогательной плоскости, пересекающий основание цилиндра.
- 24.3.5 Вычертить в этой же плоскости проекций параллелограмм – проекцию фигуры сечения цилиндра вспомогательной плоскостью (или прямоугольник, в случае прямого цилиндра).
- 24.3.6 Обозначить точки пересечения одноименной проекции прямой с этой проекцией фигуры сечения. Это и будут проекции искомых точек встречи.
- 24.3.7 Найти вторые проекции точек встречи на соответствующей проекции заданной прямой с помощью проекционных связей.
- 24.3.8 Определить видимость участков прямой с учетом видимости цилиндра и взаимного положения тела и прямой относительно плоскостей проекций.

На рисунке 94 прямая пересекает наклонный цилиндр, лежащий своим основанием в горизонтальной плоскости проекций. Для получения точного решения следует провести плоскость, параллельную образующей цилиндрической поверхности.

Пересечем заданную прямую вспомогательной прямой TM_2 . Для этого из произвольной точки T'' фронтальной проекции прямой $A''B''$ проведем отрезок прямой, параллельной соответствующей проекции образующей цилиндра; горизонтальную проекцию точки T находим в проекционной связи на $A'B'$ и строим вторую проекцию прямой параллельно горизонтальной проекции образующей. Продлим фронтальные проекции пересекающихся прямых до пересечения с осью Ox . В точках пересечения находятся фронтальные проекции горизонтальных следов прямых. Их горизонтальные проекции M'_1 и M'_2 находим в проекционной связи на продолжении отрезков $A'B'$ и $T'M'_2$, соответственно. Проведем через них горизонтальный след вспомогательной плоскости $h'_{0\alpha}$, проходящей параллельно образующей цилиндра. Эта плоскость рассекает цилиндр по параллелограмму с отрезком $I'2'$ в нижнем основании. Отрезок $A'B'$ пересекается с горизонтальной проекцией параллелограмма в точках K' и L' . Фронтальные проекции точек встречи K'' и L'' находим на $A''B''$ в проекционной связи.

Определяем видимость прямой относительно цилиндра. В горизонтальной плоскости проекций точка K' лежит на видимой образующей цилиндра, а точка L' – на невидимой. Поэтому слева прямая видна на отрезке $A'K'$, до точки входа в цилиндр, а справа она была бы видна только от очерка верхнего основания цилиндра. Во фронтальной плоскости проекций образующая, содержащая K'' , видима, а та, на которой лежит L'' , – невидима. Как следствие, слева отрезок

прямой виден от A'' до крайней образующей цилиндра, а справа от точки L'' – места выхода прямой из цилиндра – до точки B'' .

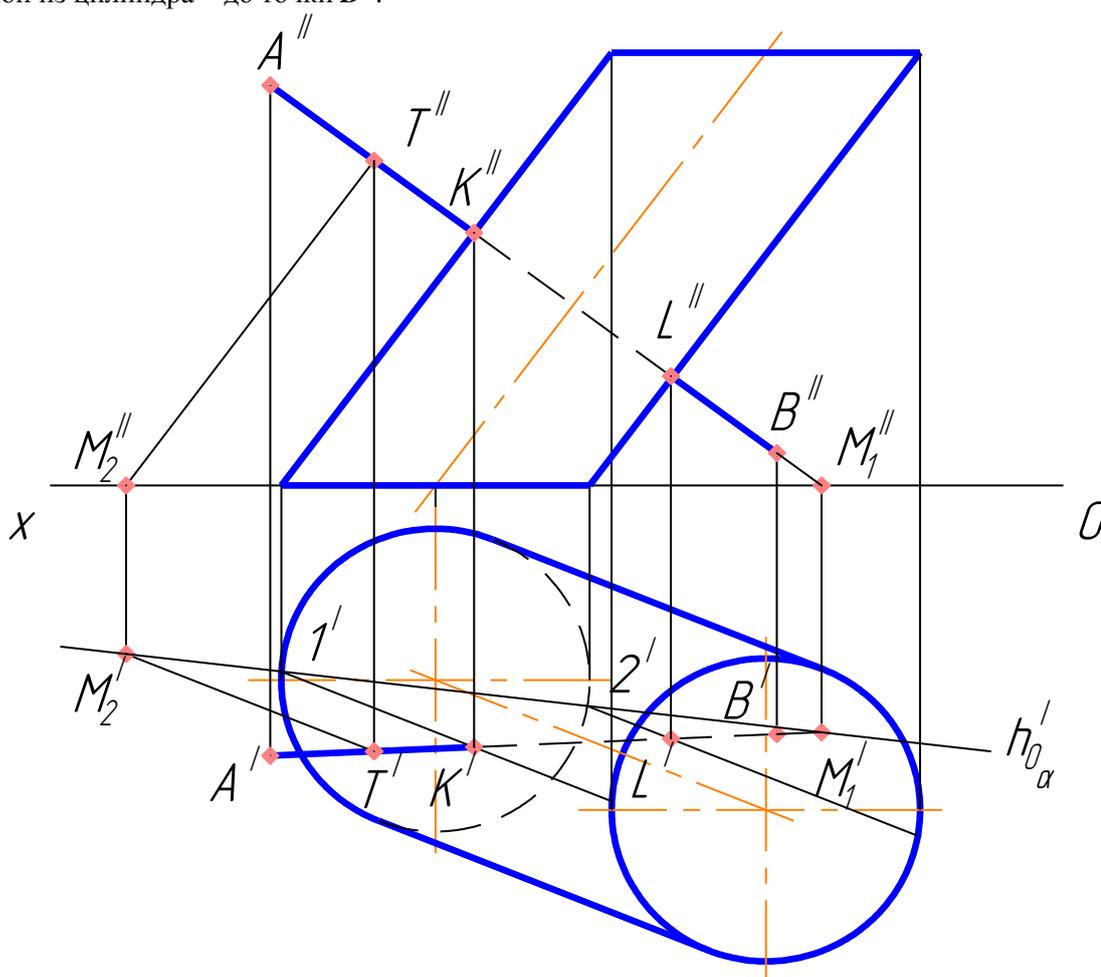


Рисунок 94 – Точки встречи прямой с цилиндром

24.4 Построение точек встречи со сферой

Сферическая поверхность пересекается по окружности вне зависимости от положения секущей плоскости, поэтому для решения можно воспользоваться вспомогательной проецирующей плоскостью.

- 24.4.1 Заклчить прямую в проецирующую плоскость, т.е. провести проецирующий след через одноименную проекцию прямой. Другие следы вспомогательной плоскости для решения не потребуются.
- 24.4.2 Преобразовать вспомогательную плоскость в плоскость уровня: для этого провести новую ось абсцисс параллельно ее проецирующему следу (Алгоритм 18.3.2).
- 24.4.3 Построить проекции заданного отрезка прямой и центра сферы в измененной плоскости проекций (Алгоритм 18.1.1).
- 24.4.4 Вычертить в этой плоскости проекций окружность соответствующего радиуса – линию пересечения сферы со вспомогательной плоскостью.
- 24.4.5 Обозначить точки пересечения проекции прямой с построенной проекцией фигуры сечения. Это и будут проекции искомых точек встречи.
- 24.4.6 С помощью проекционных связей перенести точки встречи в исходные плоскости проекций.
- 24.4.7 Определить видимость участков прямой с учетом видимости сферы и взаимного положения тела и прямой относительно плоскостей проекций.

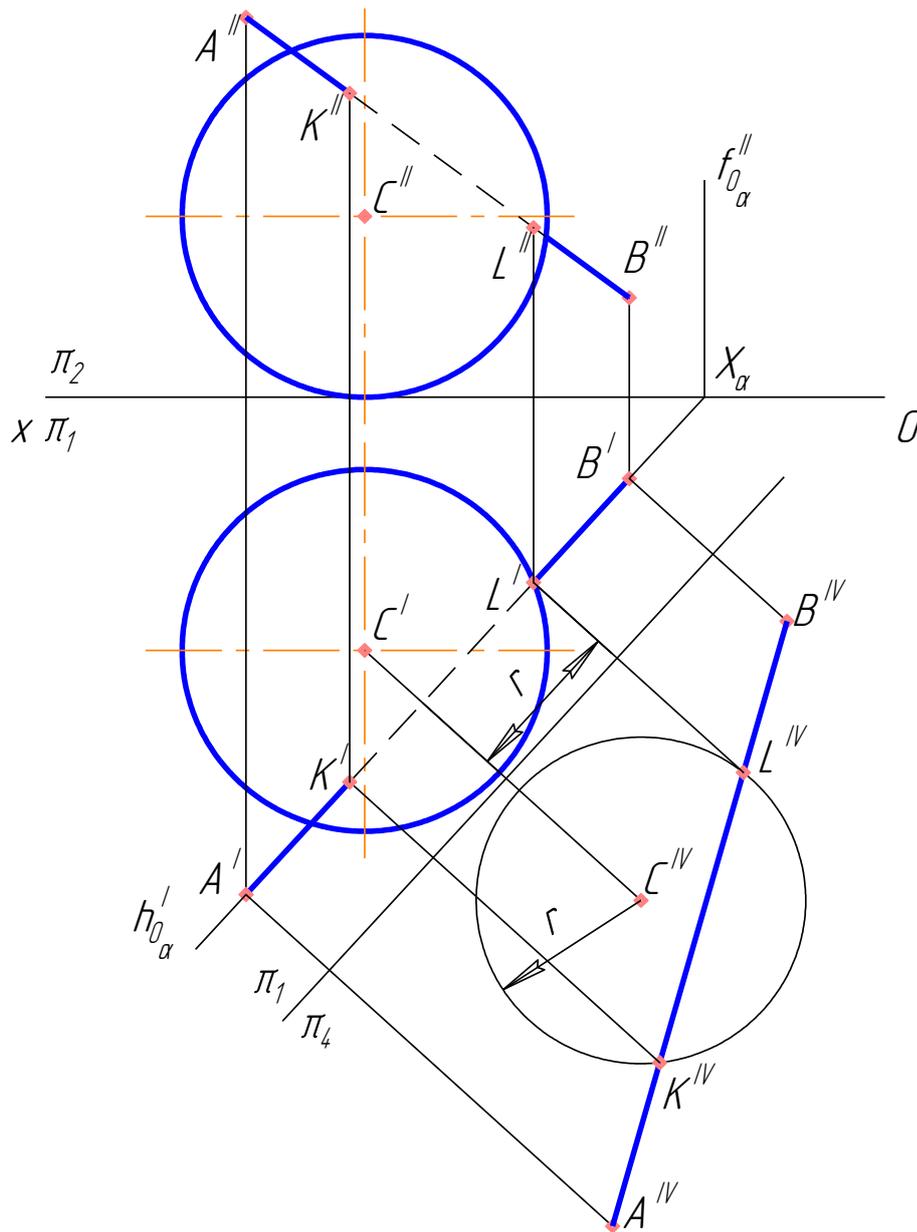


Рисунок 95 – Точки встречи прямой со сферой

На рисунке 95 сфера с центром в точке C пересекается с прямой AB . Заклучим прямую в горизонтально проецирующую плоскость α : ее горизонтальный след $h'_{0\alpha}$ проходит через $A'B'$. Эта плоскость рассекает сферу по окружности радиуса r , которая отобразится в натуральную величину в измененной фронтальной плоскости проекций π_4 , параллельной плоскости α . Проведем новую ось абсцисс π_1/π_4 параллельно $h'_{0\alpha}$. Построим измененную фронтальную проекцию отрезка прямой $A''B''$. Перенесем в плоскость проекций π_4 центр сферы. Эта же точка будет центром и для окружности радиуса r , получаемой в сечении вспомогательной плоскостью. Измененные фронтальные проекции точек встречи K'' и L'' являются точками пересечения построенных в истинную величину фигуры сечения и отрезка прямой $A''B''$. Проекции K' и L' , а затем K'' и L'' получаем с помощью проекционных связей.

Определяем видимость прямой относительно сферы. В горизонтальной плоскости проекций точка K' принадлежит верхней полусфере, а точка L' – нижней полусфере. Как следствие, виден отрезок $A'K'$, а затем – отрезок от очерка сферы до точки B' . Во фронтальной плоскости проекций K'' лежит на ближней полусфере, а точка L'' – на дальней. Поэтому и в плоскости π_2 видимость участков прямой аналогична обозначенной для горизонтальной плоскости проекций.

24.5 Пересечение тела вращения с прямой, пересекающей ось его вращения

Прямая, для которой требуется найти точки встречи, в частном случае может пройти через ось поверхности вращения: прямого цилиндра или конуса, сферы или тора, эллипсоида или параболоида и т.п. Такое взаимное положение тела и прямой позволяет построить точки встречи без использования вспомогательной секущей плоскости.

- 24.5.1 Повернуть прямую относительно оси тела вращения до положения, параллельного плоскости проекций, к которой параллельна эта ось (Алгоритмы 5, 7.1.4). Та же операция вращения отобразит тело вращения само в себя.
- 24.5.2 В плоскости проекций, параллельной оси вращения тела, обозначить точки пересечения преобразованной проекции прямой с крайними образующими тела вращения. Это – проекции точек встречи на преобразованной прямой.
- 24.5.3 Перенести точки встречи на одноименную проекцию прямой до преобразования с помощью связей, перпендикулярных оси вращения.
- 24.5.4 Найти вторые проекции точек встречи на соответствующей проекции заданной прямой с помощью проекционных связей.
- 24.5.5 Определить видимость участков прямой с учетом видимости поверхности вращения и взаимного положения тела и прямой относительно плоскостей проекций.

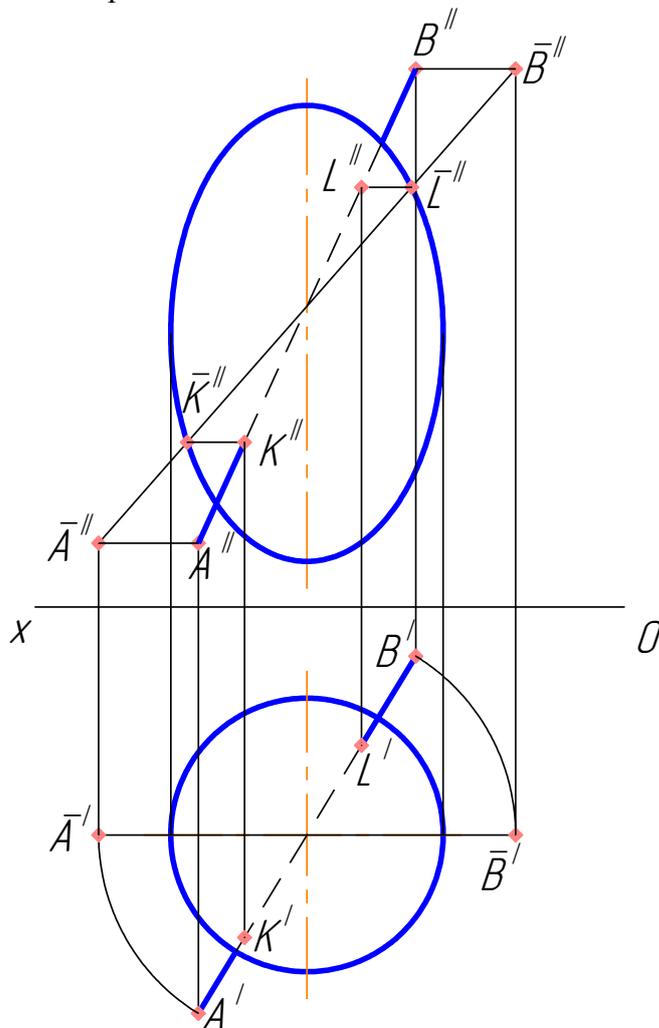


Рисунок 96 – Точки встречи эллипсоида с прямой, проходящей через ось его вращения проекции эллипсоида и отрезок $L'B'$. Во фронтальной плоскости проекций на видимой

На рисунке 96 этот Алгоритм проиллюстрирован построением точек пересечения эллипсоида с прямой AB , пересекающей ось его вращения.

Повернем прямую в положение фронтальной относительно оси тела вращения. При этом точки A' и B' будут двигаться по дугам окружности с центром в точке, в которую проецируется ось вращения, до окончательного положения $\bar{A}'\bar{B}'$, параллельного оси Ox . Во фронтальной плоскости проекций точки A'' и B'' перемещаются по прямым, перпендикулярным оси вращения, т.е. параллельно оси Ox . Находим точки \bar{A}'' и \bar{B}'' на этих траекториях в проекционной связи с преобразованными горизонтальными проекциями.

После поворота прямой и тела вращения точки встречи определяются в плоскости π_2 как точки пересечения $\bar{A}''\bar{B}''$ с очерком тела вращения, обозначим их \bar{K}'' и \bar{L}'' . Возвратим их на фронтальную проекцию прямой с помощью аналогичных траекторий вращения, параллельных Ox , получим точки K'' и L'' . Горизонтальные проекции точек встречи получаем на $A'B'$ с помощью проекционных связей.

Определяем видимость прямой. В горизонтальной плоскости проекций точка K' находится на нижней половине эллипсоида, а точка L' – на верхней. Виден участок прямой от A' до очерка

Перв. примен.																												
Справ. №																												
Подп. и дата	<p>Найти точки встречи прямой с поверхностью.</p>																											
Инв. № д.д.д.																												
Взам. инв. №	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 10%; text-align: center;">Изм.</td> <td style="width: 10%; text-align: center;">Лист</td> <td style="width: 10%; text-align: center;">№ докум.</td> <td style="width: 10%; text-align: center;">Подп.</td> <td style="width: 10%; text-align: center;">Дата</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">Разраб.</td> <td style="text-align: center;">Гнилуша</td> <td style="text-align: center;">Лютарович</td> <td style="text-align: center;">07.11.15</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">Проб.</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">Н.контр.</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">Утв.</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>			Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Разраб.	Гнилуша	Лютарович	07.11.15		Проб.					Н.контр.					Утв.				
Изм.				Лист	№ докум.	Подп.	Дата																					
Разраб.	Гнилуша	Лютарович	07.11.15																									
Проб.																												
Н.контр.																												
Утв.																												
Подп. и дата	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 30%; text-align: center;">Лит.</td> <td style="width: 30%; text-align: center;">Лист</td> <td style="width: 40%; text-align: center;">Листов</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">1</td> </tr> </table>			Лит.	Лист	Листов			1																			
Лит.	Лист	Листов																										
		1																										
Инв. № подл.	<p style="font-size: 1.2em; font-weight: bold;">Задача 18</p> <p style="font-size: 1.2em; font-weight: bold;">Вариант 31</p>																											
	<p style="font-size: 1.2em; font-weight: bold;">группа 300</p>																											
	<p>Копировал _____ Формат А4</p>																											

Рисунок 97 – Пример оформления задания на построение точек встречи прямой с поверхностью

поверхности тела лежит K'' , поэтому виден участок $A''K''$, а затем прямая становится видимой только после выхода из-за эллипсоида.

Рисунок 97 приводит пример решения одной из возможных задач на определение точек встречи прямой и поверхности.

Отметим, что конус, лежащий основанием во фронтальной плоскости проекций, пересекает фронтальная прямая. Такое взаимное положение прямой и тела относительно плоскостей проекций позволяет не строить плоскость, проходящую через вершину конуса, как предлагает Алгоритм 24.2, а воспользоваться вспомогательной фронтальной плоскостью, проходящей через заданную прямую. Она пересекает конус по окружности, на которой и находятся искомые точки встречи.

25 Решение задач с нетиповыми условиями

При пояснении алгоритмов в пособии нами рассматривались задачи, условия для которых формулировались образом, сходным с принятым для типовых задач, которые предстояло решать студентам в качестве домашнего задания и на контрольных работах. В экзаменационных билетах ряд заданий, не выходящих за пределы курса, намеренно сформулирован несколько по-иному, что должно позволить оценить умение студента ориентироваться в изученном материале.

Далее нами рассмотрен ряд задач, позволяющих привести примеры таких «необычных» формулировок и описать понятия и методы, которыми должен уметь оперировать студент.

25.1 Задачи, связанные с определением удаленности от плоскости проекций

Задавая точку аналитическим или графическим способом, мы однозначно определяем его координаты. Другой случай, когда требуется построить точку на некотором удалении от плоскости проекций, другими словами, на заданном расстоянии от определенной плоскости. Следует помнить, что расстояние не имеет знака, т.е. в общем

случае предполагает и положительную, и отрицательную координату. Поэтому задачи такого рода, как правило, имеют несколько решений.

Задачи, связанные с удаленностью от плоскостей проекций, могут быть комплексными. Пример такой задачи рассмотрен на рисунке 98. В ней требуется построить точки, принадлежащие заданной плоскости и лежащие на определенном удалении от горизонтальной и профильной плоскостей проекций.

Плоскость α задана следами. Удаление от плоскости π_1 связано с координатой, отсчитываемой по нормали к этой плоскости, т.е. с координатой z . Таким образом, искомые точки лежат на горизонталях плоскости α , фронтальные проекции которых

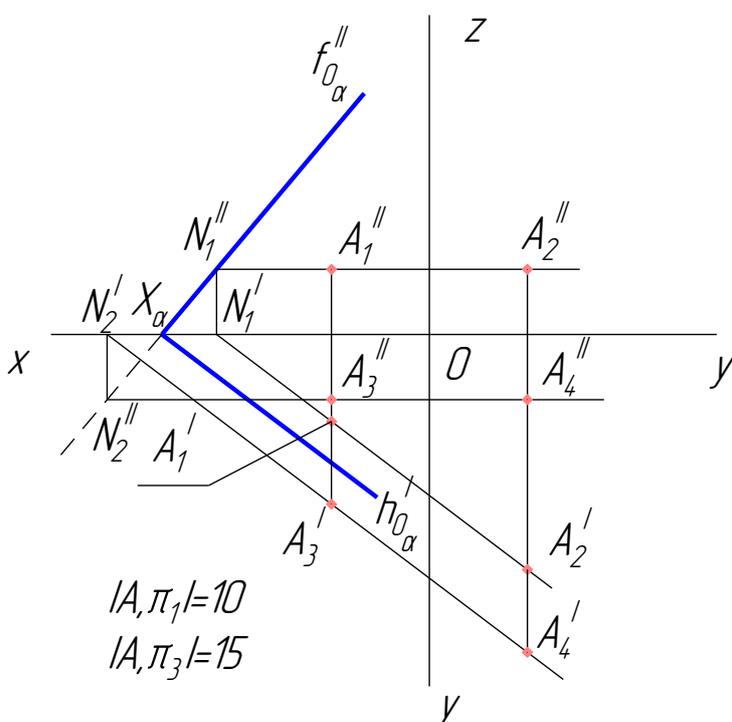


Рисунок 98 – Построение точки, лежащей на заданном удалении от плоскостей проекций

проводятся параллельно оси Ox на заданном расстоянии от нее в 10 мм.

Первая из этих фронтальных проекций проведена с положительной аппликацией. Она пересекает след f''_{α} в точке N''_1 , горизонтальная проекция которой лежит на оси Ox . Горизонтальная проекция горизонтали проходит через эту точку параллельно h'_{α} . Искомые точки на этой горизонтали выделяем в соответствии со вторым заданным расстоянием: удаление от плоскости π_3 – это координата x . Точка A_1 имеет положительную абсциссу, равную 15 мм, а точка A_2 – отрицательную.

Вторая горизонталь плоскости α , лежащая ниже горизонтальной плоскости проекций, строится аналогично. Она позволяет получить еще два решения с различными знаками координаты x – точки A_3 и A_4 .

25.2 Задачи, проверяющие свойства, связанные с взаимным положением элементов

Имеется целый ряд позиционных задач, связанных не с построением некоторого элемента, а с необходимостью проверить взаимное положение заданных элементов. Например, условие может потребовать выяснить, параллельны ли плоскости, заданные геометрическими элементами (проверка параллельности одноименных следов), параллельна ли прямая плоскости (проверка параллельности одноименных проекций заданной прямой и соответствующей прямой, построенной в заданной плоскости) или же доказать взаимную перпендикулярность плоскостей (проверка прохождения одной плоскости через перпендикуляр к другой).

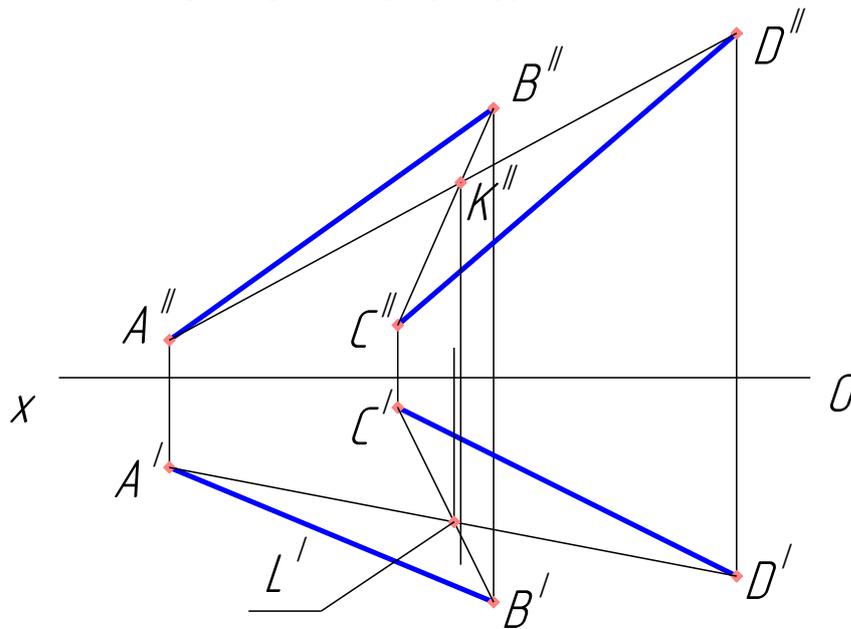


Рисунок 99 – Проверка пересечения заданных прямых

Интересная задача этого рода рассмотрена на рисунке 99. В ней требуется выяснить, пересекаются ли прямые AB и CD , одноименные проекции которых не пересекаются в пределах листа по условию задания.

Проверка базируется на положении о том, что пересекающиеся прямые должны задавать плоскость. Для проверки этого можно, опираясь на соответствующие следы прямых построить фронтальный и горизонтальный следы предполагаемой плоскости.

Если точка их пересечения находится на оси Ox , то плоскость задана, и прямые являются пересекающимися. Однако такое решение связано с достаточно объемными построениями, в результате которых может получиться, что и вычерченные следы не пересекаются в пределах чертежа.

Предлагается следующий ход рассуждений. Если прямые пересекаются и задают плоскость, то в этой плоскости могут быть построены другие пересекающиеся прямые, например, диагонали предположительно плоского четырехугольника $ABCD$. Построим фронтальную и горизонтальную проекции прямых AD и BC . Точка пересечения фронтальных проекций K'' не лежит на общей проекционной связи с точкой пересечения горизонтальных проекций L' . Поэтому можно сделать вывод, что прямые AD и BC скрещиваются и, следовательно, скрещивающимися являются также прямые AB и CD .

25.3 Задачи, связанные с комплексным применением методов преобразования эпюра

При решении метрических задач мы, как правило, сталкивались с необходимостью воспользоваться либо методом перемены плоскостей проекций, либо одним из вариантов метода вращения. Однако некоторые задачи требуют для решения их совместного применения, как последовательного, так и одновременного.

Один из вариантов таких задач рассмотрен на рисунке 100. В ней требуется повернуть точку K относительно прямой AB так, чтобы она оказалась на заданном расстоянии L от прямой CD (прямые AB и CD параллельны).

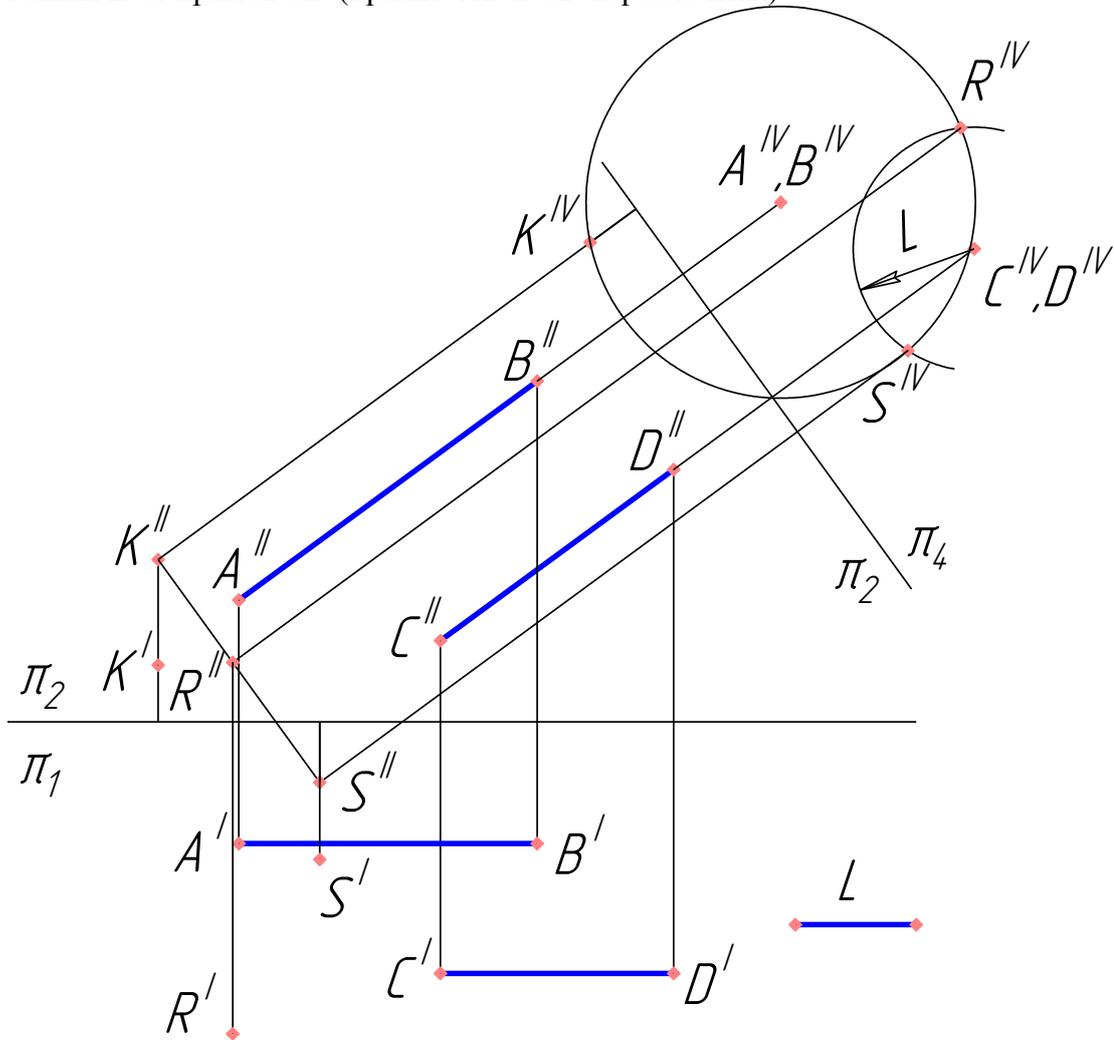


Рисунок 100 – Задача на совместное применение методов перемены плоскостей проекций и вращения

Заданные прямые находятся в частном положении: они параллельны фронтальной плоскости проекций. Это позволяет преобразовать их в проецирующее положение одной переменной плоскостей проекций. Проведем новую ось абсцисс π_4/π_2 под прямым углом к $A''B''$ и $C''D''$. В новой горизонтальной плоскости проекций π_4 прямые спроецируются в точки: $A^{IV}(B^{IV})$ и $C^{IV}(D^{IV})$. При построении измененной горизонтальной проекции точки K следует помнить об ее отрицательной ординате, в результате проекция K^{IV} занимает свое место по другую сторону от оси π_4/π_2 .

В системе плоскостей проекций π_2 и π_4 при вращении точка K будет двигаться по окружности, параллельной π_4 и перпендикулярной π_2 . Эта окружность отображается в натуральную величину на измененную горизонтальную плоскость проекций: вычерчиваем ее, взяв в качестве центра $A^{IV}(B^{IV})$, а в качестве радиуса – расстояние от центра до K^{IV} . Так как и прямая

CD проецируется на π_4 в точку, расстояние до нее от любой точки отображается в натуральную величину. Поэтому мы можем построить дугу окружности с центром в C^{IV} (D^{IV}) и радиусом, равным L . Там, где она пересечет проекцию траектории перемещения K , и находится искомое ее положение. Таких пересечения два – задача имеет два решения, в этой проекции мы обозначили их как R^{IV} и S^{IV} .

Во фронтальной плоскости проекций траектория движения точки представляет собой прямую, перпендикулярную оси вращения $A''B''$, и, соответственно, параллельную оси π_4/π_2 . На этой линии в проекционной связи с R^{IV} и S^{IV} находим точки R'' и S'' . Их исходные горизонтальные проекции определяем, используя одну из особенностей метода перемены плоскостей проекций: ординаты точек в плоскости π_1 и в плоскости π_4 равны. Поэтому мы строим R' и S' на том же расстоянии от оси π_2/π_1 , на каком лежат от оси π_4/π_2 точки R^{IV} и S^{IV} (знак координат также учитывается).

25.4 Задачи, связанные с построением истинной величины углов

Решая типовые задачи, мы научились строить истинную величину углов между геометрическими элементами. Однако можно столкнуться с необходимостью построить элемент, который бы составлял заданный угол с другим, уже имеющимся элементом. Такие задания, как правило, проверяют знание положения о том, что угол проецируется в натуральную величину на некоторую плоскость проекций, если обе его стороны параллельны этой плоскости, т. е. угол лежит в плоскости уровня.

На рисунке 101 рассматривается решение задачи, в которой через точку C необходимо построить прямую, составляющую с заданной прямой AB угол 60° .

Точка C и прямая AB определяют плоскость, содержащую заданный угол. Ее необходимо преобразовать в плоскость уровня, чтобы построить истинную величину угла. Это можно выполнить за две перемены плоскостей проекций. Однако метод вращения позволяет сделать это с меньшим объемом построений.

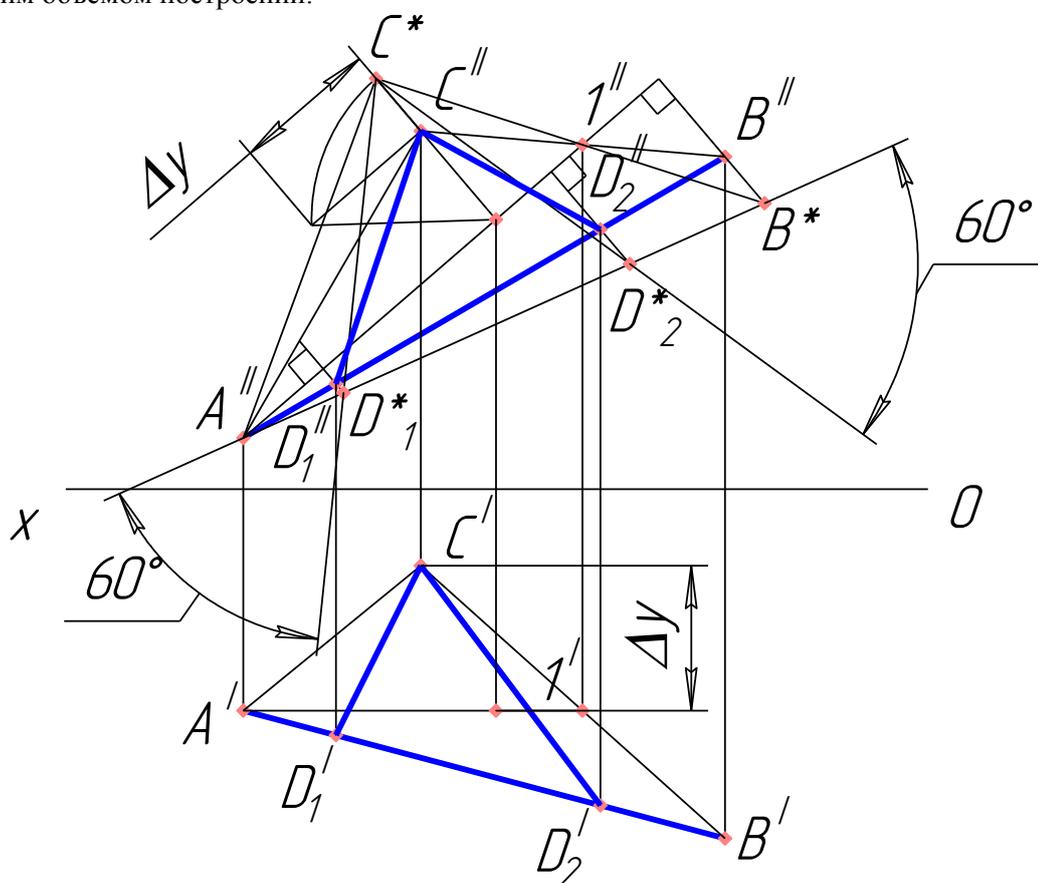


Рисунок 101 – Задача, связанная с построением угла между пересекающимися прямыми

Объединим точку C и отрезок AB в треугольник. Проведем в его пределах фронталь AI : горизонтальная проекция $A'I'$ параллельна оси Ox , фронтальная $A''I''$ строится в проекционной связи. Отрезок $A''I''$ проецируется в натуральную величину – его можно использовать в качестве оси вращения. Строим истинную величину треугольника ABC вращением относительно фронтали. Положение точки C^* определяем за счет построения истинной величины радиуса ее вращения. Точку B^* находим, проведя отрезок прямой C^*I'' до пересечения с траекторией движения точки B'' . Соединяем точки A'' , B^* и C^* – полученный треугольник отображается в истинную величину. Вся плоскость, заданная точкой C и отрезком AB , стала параллельной фронтальной плоскости проекций, поэтому мы можем в ней построить любой угол в истинную величину.

Проводим два отрезка $C^*D^*_1$ и $C^*D^*_2$, составляющие заданный угол (60°) с прямой $A''B^*$. Теперь их следует возвратить в исходные проекции. Фронтальные проекции точек D''_1 и D''_2 находим на пересечении траекторий их вращения, перпендикулярных $A''I''$, с отрезком $A''B''$. Точки D'_1 и D'_2 на горизонтальной плоскости проекций определяем, пользуясь проекционными связями. Соединяем полученные проекции точек D_1 и D_2 с соответствующей проекцией точки C – задача решена.

Если требуется построить прямой угол, можно также действовать аналогичным образом. Однако следует вспомнить, что угол в 90° отображается в натуральную величину, если всего одна из его сторон параллельна некоторой плоскости проекций. Задача, связанная с построением прямого угла, рассмотрена на рисунке 102.

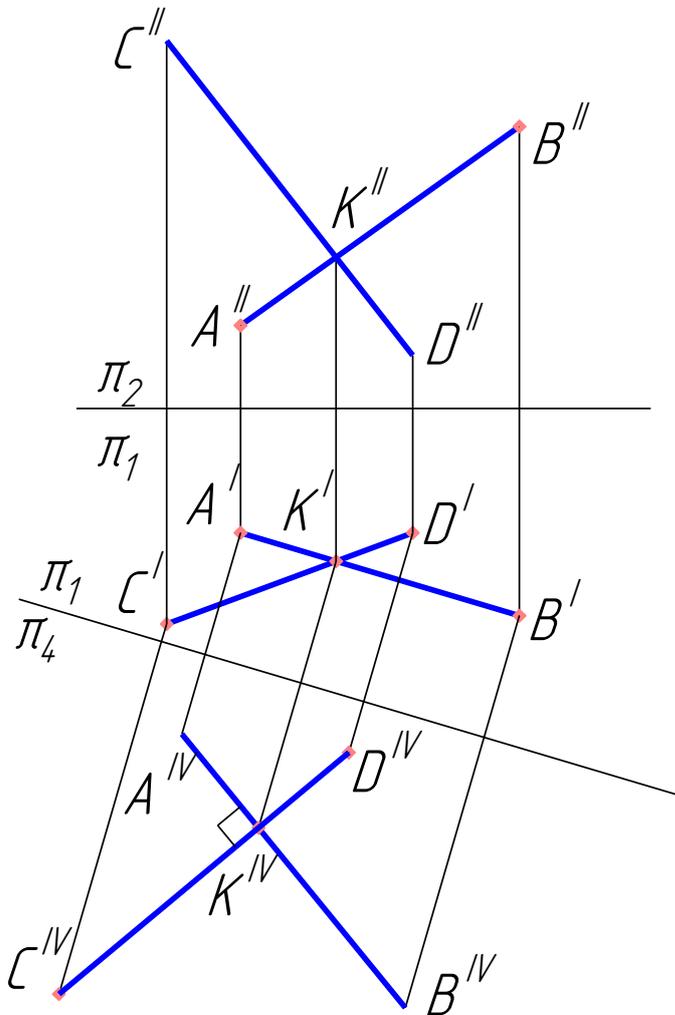


Рисунок 102 – Задача на построение прямого угла между пересекающимися прямыми

Пусть заданы две проекции прямой AB и горизонтальная проекция прямой CD . Требуется построить $C''D''$, если известно, что прямая CD пересекает AB под углом 90° .

Воспользуемся методом перемены плоскостей проекций. Проведем новую ось абсцисс π_1/π_4 параллельно $A'B'$. Построим измененную фронтальную проекцию отрезка AB – $A''B''$. Эта проекция является истинной длиной отрезка, поэтому прямой угол, составленный с прямой AB , в этой плоскости проекций будет отображаться без искажений.

Известно, что прямые пересекаются. Поэтому точка пересечения горизонтальных проекций является проекцией пересечения самих прямых AB и CD . Обозначим ее K . С помощью проекционной связи найдем K'' и проведем через нее прямую, перпендикулярную $A''B''$. Также используя проекционные связи, отметим на ней точки C'' и D'' .

Остается перенести прямую CD в исходную фронтальную плоскость проекций. Мы можем воспользоваться проекционной связью и обозначить точку K'' . После этого мы можем построить одну из крайних точек отрезка $C''D''$, используя ее координату z , измеренную в плоскости проекций π_4 . Пусть таким образом будет построена точка C'' .

Тогда, после того как проведена прямая $C''K''$, точку D'' находим на ней в проекционной связи с D' .

25.5 Задачи на построение сечения тела плоскостью с предварительным условием

В параграфе 23 был рассмотрен целый ряд заданий, связанных с построением сечения тела плоскостью как частного, так и общего положения. Однако при этом секущая плоскость всегда была задана в явном виде. Существуют задачи, в которых плоскость, рассекающая тело, должна быть построена на основании некоторого описания.

Одна из таких задач рассмотрена на рисунке 103. В ней требуется рассечь пирамиду плоскостью, проходящей через точку A и перпендикулярной ребру пирамиды SC .

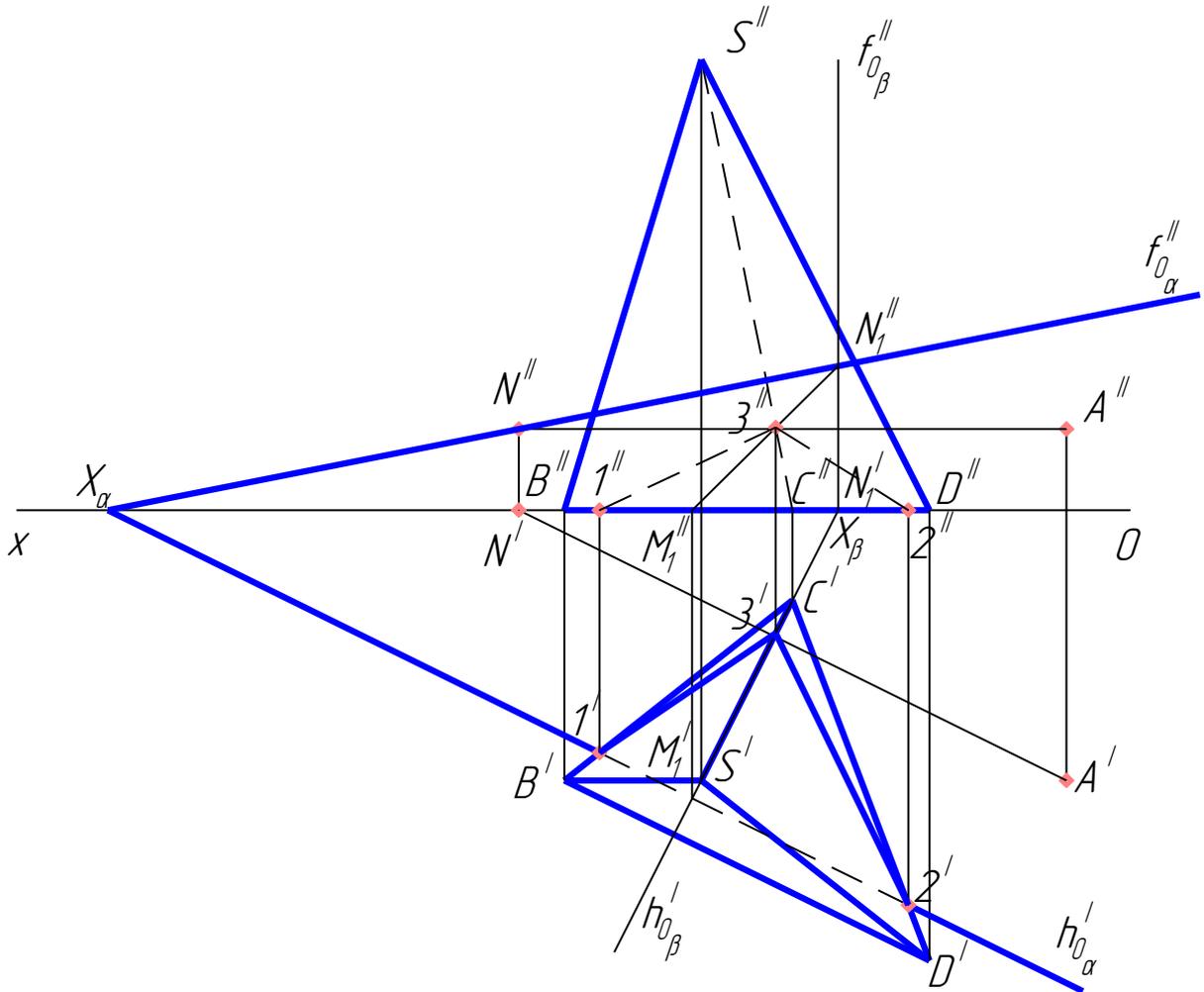


Рисунок 103 – Сечение пирамиды плоскостью, отвечающей определенным условиям

Начнем с построения описанной плоскости. Проведем через точку A горизонталь секущей плоскости α : ее горизонтальная проекция должна быть перпендикулярна проекции ребра $S'C'$, а фронтальная – параллельна оси Ox . На пересечении горизонтальной проекции горизонтали с Ox находим горизонтальную проекцию ее фронтального следа N' . Его фронтальная проекция N'' лежит на $A''N''$ в проекционной связи. Через точку N'' мы можем провести фронтальный след плоскости $f''_{0\alpha}$ под прямым углом к $S''C''$. Пересечение $f''_{0\alpha}$ с Ox дает нам точку схода следов X_α . Через нее параллельно $A''N''$ проводим горизонтальный след секущей плоскости $h'_{0\alpha}$.

Полученная плоскость α находится в общем положении. Задачи такого рода мы учились решать переводом плоскости в частное положение (Алгоритм 23.2.1). Однако прежде чем прибегать к методу ППП, проанализируем положение плоскости α и возможную фигуру сечения. След $h'_{0\alpha}$ плоскости рассекает основание пирамиды, таким образом, линия пересечения с

основанием лежит на этом следе и представляет собой отрезок $I'2'$. Его фронтальную проекцию $I'2''$ находим с помощью проекционных связей. От линии $h'_{0\alpha}$ плоскость α поднимается к фронтальной плоскости проекций, пересекая ее по линии $f''_{0\alpha}$. Следовательно, пересекать она будет всего одно ребро пирамиды, а именно SC . Точку встречи плоскости α с ним мы можем найти и не прибегая к перемене плоскостей проекций.

Заклучим прямую SC в горизонтально проецирующую плоскость β : горизонтальный след $h'_{0\beta}$ проходит через проекцию $S'C'$, а фронтальный след $f''_{0\beta}$ от точки схода следов X_p идет под прямым углом к оси Ox . Пересечение одноименных следов плоскостей α и β позволяет нам найти линию их пересечения – прямую M_1N_1 . Фронтальная проекция этой прямой $M''_1N''_1$ пересекает проекцию отрезка $S''C''$, лежащего с ней в одной плоскости. Полученная точка $3''$ является фронтальной проекцией точки встречи. Ее горизонтальную проекцию, точку $3'$ находим на $S'C'$ в проекционной связи.

Соединяем отрезки фигуры пересечения с учетом их видимости. Во фронтальной плоскости проекций отрезок $I'2''$ в основании пирамиды перекрывает его сторона $B''D''$, а отрезки $I'3''$ и $3''2''$ лежат в невидимых гранях. Они изображены штриховой линией. На горизонтальной плоскости проекций невидимым является только отрезок в основании $I'2'$.

26 Контрольные вопросы по разделу «Начертательная геометрия»

1. Точка общего и частного положения на эюре и в косоугольной фронтальной диметрической проекции.
2. Точка общего и частного положения на эюре и в прямоугольной изометрической проекции.
3. Прямая общего и частного положения. Способы определения истинной величины отрезка прямой.
4. Прямая общего положения: определение следов прямой и разбиение отрезка прямой по частям пространства.
5. Прямая частного положения: определение следов прямой и разбиение отрезка прямой по частям пространства.
6. Способы задания плоскости. Определение следов плоскости, заданной другими геометрическими элементами.
7. Плоскости общего и частного положения. Особые свойства плоскостей частного положения, примеры их использования.
8. Принадлежность прямой общего и частного положения плоскости: построение проекций фигуры, лежащей в плоскости.
9. Принадлежность точки плоскости. Построение проекций элементов, принадлежащих плоскости, заданной плоской фигурой.
10. Параллельные прямые и плоскости. Построение недостающей проекции прямой, параллельной заданной плоскости. Построение плоскости, проходящей через заданную точку и параллельной заданной плоскости.
11. Проецирование углов между пересекающимися прямыми. Прямая, перпендикулярная плоскости. Построение плоскости, проходящей через заданную точку и перпендикулярной заданной прямой.
12. Взаимно перпендикулярные плоскости. Построение плоскости, проходящей через заданную прямую и перпендикулярной заданной плоскости.
13. Определение линии пересечения плоскостей, заданных следами.

14. Определение линии пересечения плоскостей, по крайней мере, одна из которых не задана следами.
15. Определение точки встречи (пересечения) прямой и плоскости.
16. Конкурирующие точки, их использование для определения видимости отрезков прямой при пересечении с плоскостью.
17. Перевод прямых и плоскостей общего положения в частное положение методом перемены плоскостей проекций.
18. Определение истинной величины плоской фигуры методом перемены плоскостей проекций.
19. Построение отрезка кратчайшего расстояния между точкой и прямой, между точкой и плоскостью методом перемены плоскостей проекций.
20. Построение отрезка кратчайшего расстояния между параллельными прямыми, между прямой и параллельной ей плоскостью методом перемены плоскостей проекций.
21. Построение отрезка кратчайшего расстояния между скрещивающимися прямыми, между параллельными плоскостями методом перемены плоскостей проекций.
22. Определение угла наклона прямых и плоскостей к плоскостям проекций методом перемены плоскостей проекций.
23. Вращение точки относительно оси, перпендикулярной плоскости проекций. Определение истинной длины отрезка прямой и угла наклона прямой к плоскости проекций методом вращения.
24. Вращение плоскости относительно фронтали или горизонтали: определение истинной величины плоской фигуры методом вращения.
25. Вращение плоскости относительно фронтали или горизонтали: определение истинной величины угла между пересекающимися прямыми.
26. Вращение плоскости относительно фронтали или горизонтали: определение истинной величины угла между прямой и плоскостью.
27. Вращение плоскости относительно фронтали или горизонтали: определение истинной величины угла между плоскостями.
28. Определение поверхности. Многогранники. Определение проекций фигуры сечения многогранника проецирующей плоскостью.
29. Линейчатые поверхности с одной независимой направляющей. Конические поверхности. Определение проекций фигуры сечения конуса проецирующей плоскостью.
30. Линейчатые поверхности с одной независимой направляющей. Цилиндрические поверхности. Определение проекций фигуры сечения цилиндра проецирующей плоскостью.

Перечисленные темы будут использованы в качестве 1-го вопроса в экзаменационных билетах по курсу «Начертательная геометрия». При ответе на данный вопрос следует привести не менее 3 графических примеров, иллюстрирующих теоретические положения или демонстрирующих прикладное значение темы.

Литература

1. Гордон, В.О.. Курс начертательной геометрии: учеб. пособие/ В.О.Гордон, М.А. Семенцов-Огиевский. – 27-е изд, стер. -М.: Высш. шк., 2008. -272с.
2. Елкин,В.В. Инженерная графика: учеб. пособие для студ. высш. учеб.заведений /В.В. Елкин, В.Т. Тозик. - М.: Издательский центр «Академия», 2009. – 304 с.
3. Попова, Г.Н. Машиностроительное черчение: Справочник/Г.Н.Попова, С.Ю. Алексеев.-5-е изд.- СПб.:Политехника, 2008. -474с.
4. Талалай, П.Г. Начертательная геометрия. Инженерная графика. Интернет-тестирование базовых знаний: Учеб. пособие/ П.Г. Талалай. – 2010. – 256с.

Оглавление

Введение.....	3
18 Метод перемены плоскостей проекций.....	4
18.1 Общие случаи применения метода ППП.....	4
18.1.1 Преобразование точки, прямой.....	4
18.1.2 Преобразование плоскости, заданной следами.....	5
18.2 Перевод отрезка прямой в частное положение.....	5
18.2.1 Преобразование прямой общего положения в прямую, параллельную плоскости проекций 5	
18.2.2 Преобразование прямой в проецирующую.....	6
18.3 Перевод плоскости в частное положение.....	6
18.3.1 Преобразование плоскости общего положения в проецирующую.....	6
18.3.2 Преобразование плоскости в дважды проецирующую.....	7
18.4 Построение истинной величины плоской фигуры методом ППП.....	8
18.5 Решение позиционных задач методом ППП.....	9
18.5.1 Пересечение плоскостей.....	9
18.5.2 Точка встречи прямой и плоскости.....	10
19 Практические приложения метода совмещения.....	13
19.1 Основные компоненты метода совмещения.....	13
19.1.1 Построение следа плоскости в совмещенном положении.....	13
19.1.2 Определение совмещенной проекции точки, лежащей в плоскости.....	14
19.2 Определение истинной величины плоской фигуры путем совмещения с плоскостью проекций.....	14
19.2.1 Плоскость общего положения.....	14
19.2.2 Плоскость частного положения.....	16
19.3 Построение плоской фигуры определенной величины в заданной плоскости.....	17
19.4 Построение тела с основанием, лежащим в заданной плоскости.....	19
20 Использование метода вращения относительно горизонтали (фронтالي) для определения истинной величины плоской фигуры.....	21
20.1 Определение положения точки при вращении относительно горизонтали (фронтали)...	21
20.2 Определение истинной величины плоской фигуры.....	22
21 Использование методов преобразования проекций для определения расстояния между геометрическими элементами.....	23
21.1 Кратчайшее расстояние до прямой.....	23
21.1.1 Определение кратчайшего расстояния от точки до прямой методом перемены плоскостей проекций.....	23
21.1.2 Определение кратчайшего расстояния от точки до прямой методом вращения относительно горизонтали (фронтали).....	25
21.1.3 Кратчайшее расстояние между параллельными прямыми.....	27
21.1.4 Кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми.....	28
21.2 Кратчайшее расстояние до плоскости.....	29
21.2.1 Кратчайшее расстояние от точки до плоскости.....	29
21.2.2 Кратчайшее расстояние между параллельными плоскостями.....	31
21.2.3 Кратчайшее расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью.....	32
22 Применение методов преобразования эпюра для определения угла между геометрическими элементами.....	32
22.1 Угол между пересекающимися прямыми.....	34
22.1.1 Решение методом вращения относительно горизонтали (фронтали).....	34
22.1.2 Решение методом перемены плоскостей проекций.....	35
22.2 Угол между скрещивающимися прямыми.....	35
22.3 Угол между прямой и плоскостью.....	36

22.4	Угол между плоскостями.....	38
22.4.1	Построение методом вращения относительно горизонтали (фронталы).....	38
22.4.2	Построение методом перемены плоскостей проекций.....	40
23	Определение линии пересечения тела плоскостью	43
23.1	Сечение плоскостью частного положения	43
23.1.1	Пересечение с призмами и пирамидами	43
23.1.2	Пересечение с конусами	44
23.1.3	Пересечение с цилиндрами.....	45
23.1.4	Пересечение с профильно проецирующей плоскостью	47
23.2	Сечение плоскостью общего положения.....	48
23.2.1	Решение с применением метода ППП.....	48
23.2.2	Решение с помощью вспомогательных секущих плоскостей.....	49
23.3	Определение линии пересечения с построением истинной величины фигуры сечения ..	52
24	Точки встречи прямой с поверхностью	52
24.1	Определение точек пересечения с многогранниками	52
24.2	Построение точек пересечения с конусами.....	55
24.3	Определение точек пересечения с цилиндрами.....	57
24.4	Построение точек встречи со сферой	58
24.5	Пересечение тела вращения с прямой, пересекающей ось его вращения.....	60
25	Решение задач с нетиповыми условиями	62
25.1	Задачи, связанные с определением удаленности от плоскости проекций	62
25.2	Задачи, проверяющие свойства, связанные с взаимным положением элементов	63
25.3	Задачи, связанные с комплексным применением методов преобразования эюра	64
25.4	Задачи, связанные с построением истинной величины углов.....	65
25.5	Задачи на построение сечения тела плоскостью с предварительным условием	67
26	Контрольные вопросы по разделу «Начертательная геометрия».....	68
	Список литературы.....	70

Кафедра инженерного проектирования

Учебное пособие

Алгоритмы решения типовых задач начертательной геометрии
Часть II. Способы преобразования эюра. Поверхность

Игорь Иванович Гнилуша

Владимир Александрович Люторович

Дмитрий Леонидович Кириллов

Отпечатано с оригинал-макета. Формат 60x90 ¹/₁₆

Печ.л. 4,2. Тираж 100 экз.

Санкт-Петербургский государственный технологический институт
(Технический университет)

190013, Санкт-Петербург, Московский пр., 26
Типография издательства СПбГТИ(ТУ), тел.49-49-365