



Минобрнауки России

---

Федеральное государственное образовательное учреждение высшего  
образования  
Санкт-Петербургский государственный технологический институт  
(технический университет)

---

Кафедра инженерного проектирования

В.А. Люторович, И.И. Гнилуша, Е.Н. Булина

# НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

## ГОТОВИМСЯ К ЭКЗАМЕНУ

### Часть 2 Позиционные задачи

Учебное пособие



Санкт-Петербург

2017 г.

Люторович, В.А. Начертательная геометрия. Часть 2 Позиционные задачи: учебное пособие /В.А. Люторович, И.И. Гнилуша, Е.Н. Булина. – СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2017 – 53 с.

Рассмотрены основные виды и методы проецирования, применяемые для отображения геометрических объектов на плоскости. Приведены примеры различного положения геометрических элементов относительно плоскостей проекции, а также их взаимного расположения.

Учебное пособие предназначено для студентов 1-5 факультетов очного отделения, изучающих дисциплину «Инженерная графика» по следующим направлениям подготовки бакалавриата: 18.03.01, 18.03.02, 22.03.01, 19.03.01, 20.03.01, 15.03.02, 08.03.01, 09.03.01.

Учебное пособие предназначено для студентов 4 факультета очного отделения, изучающих дисциплину «Инженерная и компьютерная графика» по следующим направлениям подготовки бакалавриата: 27.03.03, 27.03.04, 15.03.04

Учебное пособие формирует у студентов следующие компетенции;

- владением основными законами геометрического формирования, построения и взаимного пересечения моделей плоскости и пространства, необходимыми для выполнения и чтения чертежей зданий, сооружений, конструкций, составления конструкторской документации и деталей (ОПК-3)

- способностью проводить предварительное технико-экономическое обоснование проектных решений, разрабатывать проектную и рабочую техническую документацию, оформлять законченные проектно-конструкторские работы, контролировать соответствие разрабатываемых проектов и технической документации заданию, стандартам, техническим условиям и другим нормативным документам (ПК-3)

Учебное пособие может быть полезно студентам заочного отделения.

Рис.50, библиогр. назв. 6.

- Рецензенты:
- 1 ООО «КВИ Интернэшнл» А.Б. Яковлев, инженер-конструктор.
  - 2 Н.А. Незамаев, кандидат технических наук, доцент кафедры машин и аппаратов СПбГТИ(ТУ)

Издание подготовлено в рамках выполнения государственного задания по оказанию образовательных услуг Минобрнауки России.

Утверждено на заседании учебно-методической комиссии механического факультета 31.08.2017 г.

Рекомендовано к изданию РИС СПбГТИ (ТУ)

## ВВЕДЕНИЕ

Решение многих задач методами начертательной геометрии, в конечном счете, сводится к определению позиционных и метрических характеристик геометрических фигур.

В первой части пособия рассматривались позиционные задачи, касающиеся определения положения геометрических фигур или их элементов относительно плоскостей проекций или относительно друг друга (в частном случае, их взаимная принадлежность).

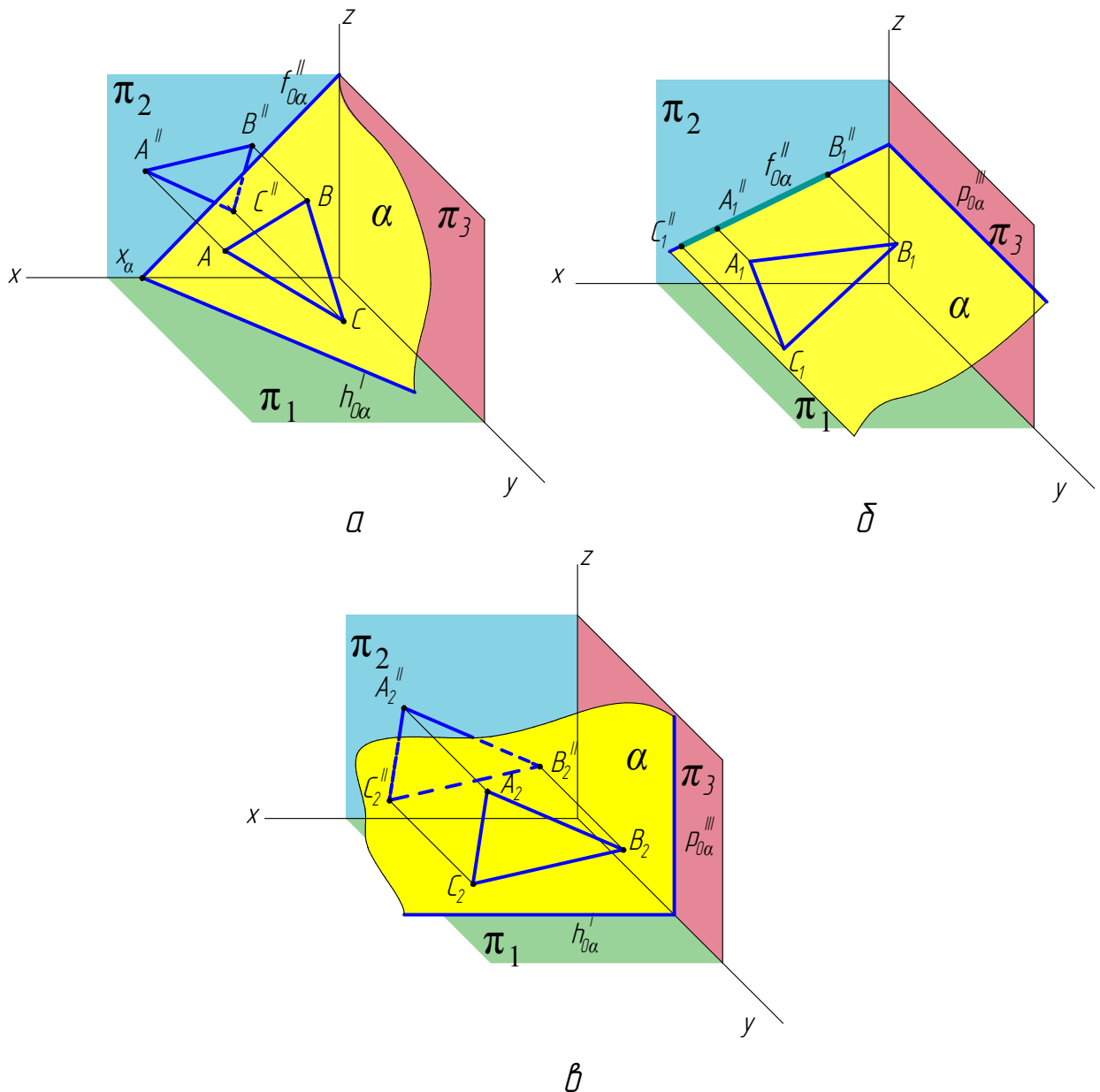
Во второй части данного учебного пособия будут рассмотрены метрические задачи, позволяющие определить истинные размеры геометрической фигуры или углы и расстояния между ее элементами, а также углы или расстояния между различными геометрическими объектами.

# 1 Общие сведения о преобразовании ортогональных проекций

Для упрощения графического решения многих метрических задач используют, как правило, различные способы преобразования проекций. Суть этих преобразований сводится, чаще всего, к приведению исследуемого геометрического объекта из общего положения в частное, т.е. наиболее выгодное для достижения поставленной цели.

Очевидно, что вид проекции геометрического объекта (ее форма и размеры) определяется не только формой и размерами проецируемой фигуры, но и зависит от взаимного расположения проецируемого объекта и плоскостей проекции.

Рассмотрим три конгруэнтных треугольника  $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1 \cong \Delta A_2B_2C_2$ , расположенных в плоскости  $\alpha$  (рисунок 1.1)



а –  $\alpha$ -плоскость общего положения; б –  $\alpha$ -фронтально проецирующая плоскость;  
в –  $\alpha$ -параллельна плоскости  $\pi_2$  ( $\alpha \parallel \pi_2$ )

Рисунок 1.1 – Проекция треугольника в зависимости от положения плоскости  $\alpha$

В зависимости от взаимного расположения плоскости  $\alpha$  и плоскости проекций треугольники могут проецироваться:

- в виде  $\Delta A''B''C''$ , если плоскость  $\alpha$  занимает произвольное положение относительно плоскости  $\pi_2$ . При этом в метрическом отношении  $\Delta A''B''C''$  не имеет ничего общего с  $\Delta ABC$ , т.е.  $\Delta ABC \neq \Delta A''B''C''$  (рисунок 1.1а);
- в виде отрезка прямой  $C_1''B_1''$ , если плоскость  $\alpha$  – фронтально проецирующая ( $\alpha \perp \pi_2$ ) (рисунок 1.1б);
- в виде  $\Delta A_2''B_2''C_2'' = \Delta ABC$ , т.е. в истинную величину, если плоскость  $\alpha \parallel \pi_2$  (рисунок 1.1в)

Таким образом, если например, требуется определить истинные размеры какого-либо геометрического объекта, то его целесообразно расположить параллельно плоскости проекций.

Подобное преобразование достигается либо изменением положения геометрического объекта по отношению к неизменной системе плоскостей проекции, либо изменяют плоскости проекций при неизменном положении геометрического объекта в пространстве.

В первом случае подобный способ преобразования проекций носит название «метод вращения». Во втором случае – «метод перемены плоскостей проекции (ППП)».

## 2 Метод вращения

Сущность метода вращения заключается в изменении положения геометрического элемента в пространстве путем его вращения вокруг неподвижной оси при неизменном положении плоскостей проекции.

В общем случае при таком вращении каждая точка вращаемого геометрического элемента перемещается в плоскости (*плоскости вращения*), перпендикулярной этой оси вращения. Траекторией вращения является окружность, центр которой находится в точке пересечения оси с плоскостью вращения. При этом радиус вращения равен кратчайшему расстоянию от вращаемой точки до оси. Точки, расположенные на оси, своего положения не изменяют.

Ось вращения может быть задана или выбрана. Условно выделим три основных способа вращения:

- вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекций;
- вокруг оси, параллельной плоскости проекций;
- вращение плоскости вокруг одного из ее следов (*метод совмещения*)

### 2.1 Вращение вокруг осей, перпендикулярных плоскостям проекций

При вращении геометрической фигуры вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекций, все ее точки перемещаются в пространстве в плоскостях, параллельных плоскости проекций.



Рисунок 2.2 – Вращение точки вокруг оси, перпендикулярной плоскости  $\pi_1$

При вращении отрезка прямой вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекций, длина проекции отрезка на эту плоскость не изменяется.

Для вращения отрезка  $AB$  вокруг оси, перпендикулярной плоскости  $\pi_1$  на угол  $\varphi$  (рисунок 2.3), нужно повернуть на этот угол две его точки (например, концы отрезка точки  $A$  и  $B$ ). Горизонтальные проекции этих точек перемещаются по дугам окружностей на один и тот же угол  $\varphi$ . Их фронтальные проекции перемещаются по прямым, параллельной оси  $OX$ .

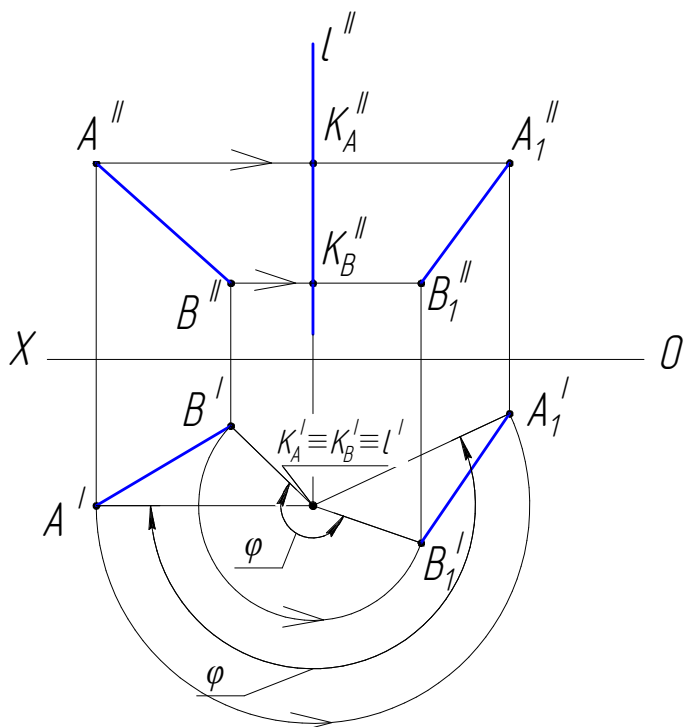


Рисунок 2.3 – Вращение отрезка вокруг оси, перпендикулярной плоскости  $\pi_1$ , на угол  $\varphi$

Наиболее часто, при определении истинной длины отрезка, вращение осуществляют вокруг оси, пересекающей этот отрезок, так как при этом их точка пересечения остается неподвижной. В качестве точки пересечения целесообразно брать один из концов отрезка.

Пример 1. Методом вращения определить истинную длину отрезка  $AB(A'B', A''B'')$  прямой общего (рисунок 2.4)

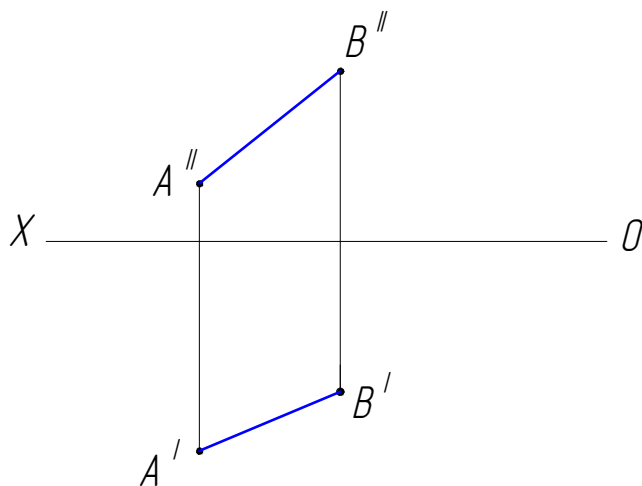


Рисунок 2.4 – Отрезок  $AB$  прямой общего положения

Для решения поставленной задачи необходимо, поворачивая данный отрезок, расположить его параллельно какой-либо плоскости проекций.

Проведем ось вращения  $l(l', l'')$ , перпендикулярную плоскости  $\pi_1$ , через точку  $B(B', B'')$  и будем поворачивать отрезок  $AB$  до тех пор, пока он не станет параллелен фронтальной плоскости проекций  $\pi_2$  (рисунок 2.5)

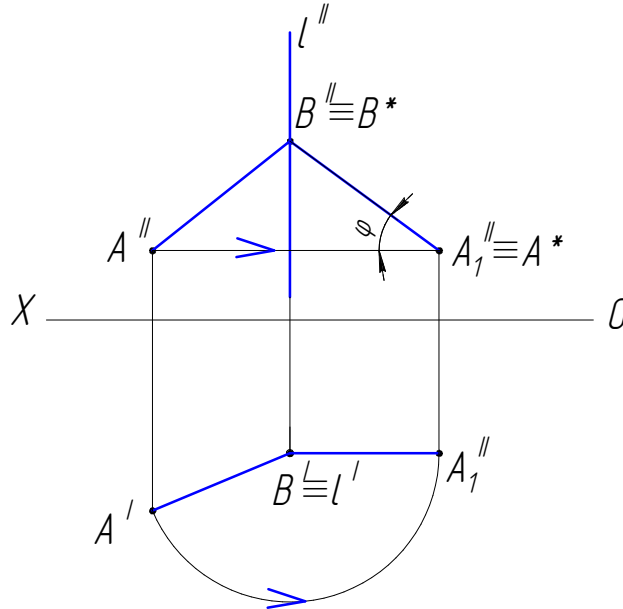


Рисунок 2.5 – Определение истинной длины отрезка вращением вокруг оси, перпендикулярной плоскости  $\pi_1$

При вращении точка  $B'$ , располагаясь на оси, будет оставаться неподвижной, а точка  $A'$  - перемещаться по дуге окружности до положения  $A_1'B' \parallel OX$ . При этом сам отрезок  $AB$  расположится параллельно плоскости  $\pi_2$ . Следовательно, его новая фронтальная проекция  $A_1''B''$  будет являться истинной длиной, т.е.  $A_1''B'' \equiv A^*B^*$ .

Следует отметить, что при определении истинной длины отрезка одновременно определяется и угол наклона этого отрезка к одной из плоскостей проекции. В данном примере угол  $\varphi$  – угол наклона отрезка  $AB$  к плоскости  $\pi_1$ . Для определения угла наклона отрезка прямой линии к плоскости  $\pi_2$ , его следует вращать вокруг оси, перпендикулярной к плоскости  $\pi_2$  до тех пор, пока он не расположится параллельно плоскости  $\pi_1$ , т.е. не займет положение горизонтальной прямой.

## 2.2 Вращение вокруг осей, параллельных плоскостям проекций (вращение вокруг линий уровня)

Метод вращения позволяет перевести плоскости общего положения в частное, т.е. расположить их параллельно плоскости проекций. Это является удобным приемом при решении метрических задач по определению их параметров (площадей, линейных и угловых размеров). В качестве оси вращения целесообразно выбирать либо фронталь, либо горизонталь плоскости.



Рассмотрим вращение некоторой точки  $A$  вокруг произвольной горизонтали  $h(h \parallel \pi_1)$  (рисунок 2.6)

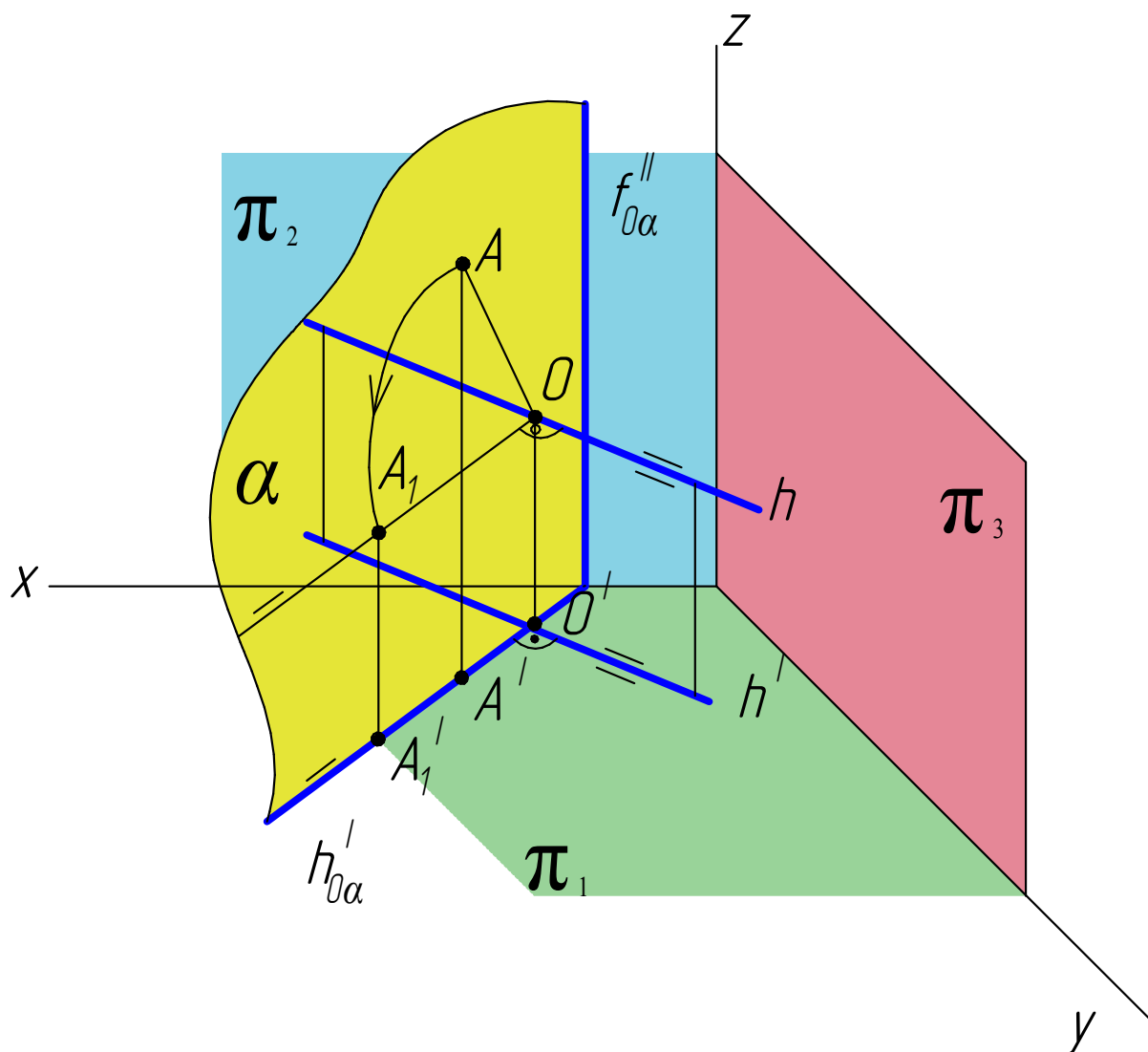


Рисунок 2.6 – Вращение вокруг горизонтали.

Траекторией перемещения точки  $A$  является окружность, расположенная в плоскости  $\alpha$ , перпендикулярной оси вращения ( $\alpha \perp h$ ) и, следовательно, горизонтальной плоскости проекций  $\pi_1$ . Центр окружности  $O$  расположен в точке пересечения оси вращения  $h$  с плоскостью  $\alpha$  ( $O = h \cap \alpha$ ). При этом горизонтальная проекция точки  $A'$  перемещается по прямой, перпендикулярной к ГПГ  $h'$ , совпадающей со следом  $h'_{0\alpha}$ .

Когда точка  $A$ , вращаясь вокруг оси  $h$ , совместится с плоскостью, параллельной плоскости проекций  $\pi_1$ , радиус вращения этой точки  $R = OA$  займет горизонтальное положение и проецируется на плоскость  $\pi_1$  без искажения:  $O'A'_1 = OA_1 = R^*$

Рассмотрим на эпюре вращение точки  $A(A', A'')$  вокруг горизонтальной оси  $h$ . Будем считать заданными положение точки  $A(A', A'')$  и горизонтали  $h(h', h'')$  (рисунок 2.7)

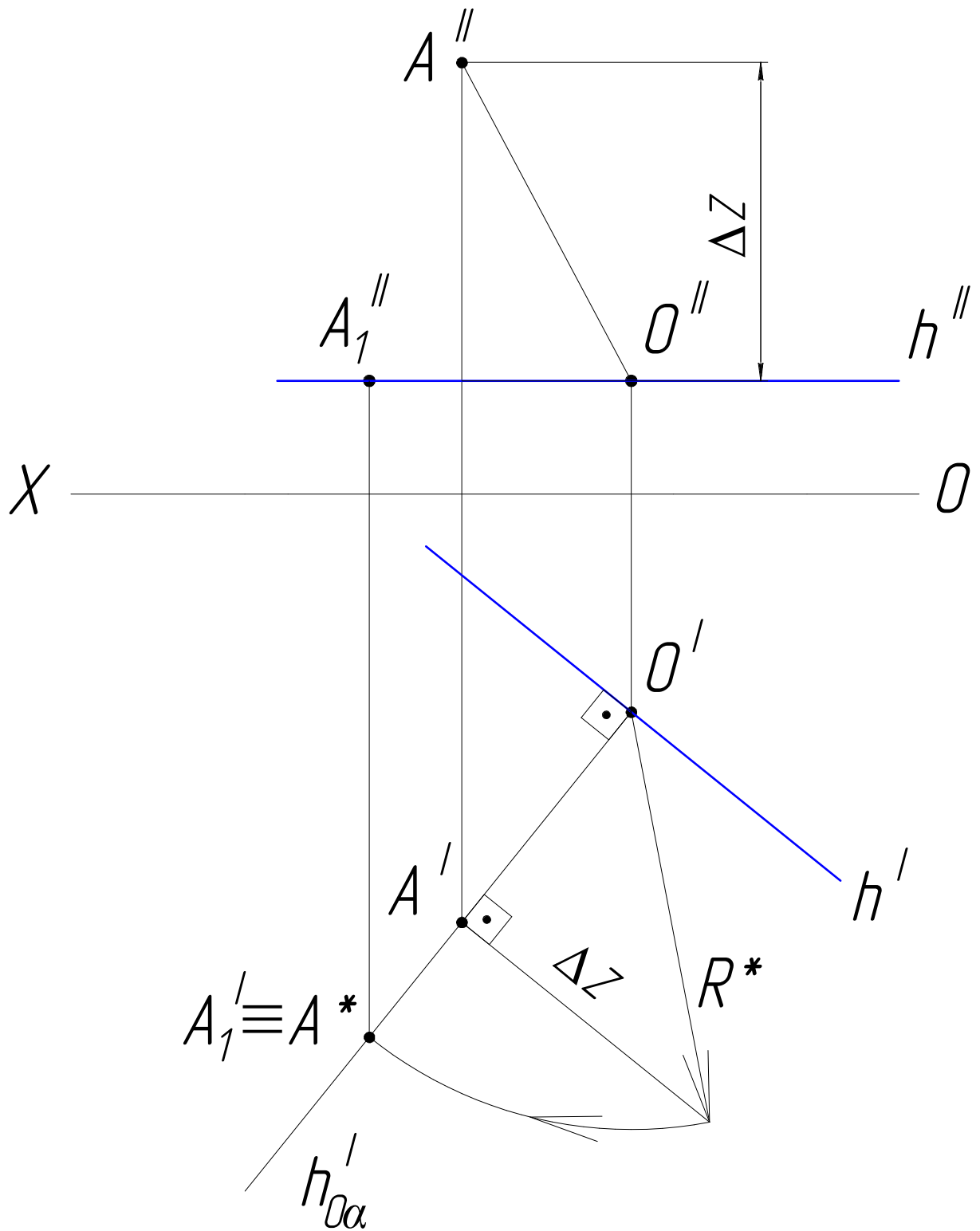


Рисунок 2.7 – Определение истинной величины радиуса вращения точки вокруг горизонтали

Выше отмечалось, что горизонтальная проекция точки  $A'$  при вращении вокруг горизонтали перемещается по прямой, перпендикулярной к ГПГ  $h'$  и совпадающей со следом плоскости вращения  $h'_{0\alpha}$  (рисунок 2.6). Поэтому из точки  $A'$  восстановим перпендикуляр  $h'_{0\alpha}$  к ГПГ  $h'$  ( $h'_{0\alpha} \perp h'$ ) и вместе их пересечения отметим точку  $O'$ , являющуюся горизонтальной проекцией центра вращения ( $O' = h' \cap h'_{0\alpha}$ ).

Фронтальная проекция центра  $O''$  располагается в проекционной связи на ФПГ  $h''$  ( $O'' \in h''$ ). Имея две проекции радиуса вращения  $OA(O'A', O''A'')$  нетрудно определить его истинную величину. Выполнить это можно, например, используя метод прямоугольного треугольника (часть 1, раздел 4.2.2). Проведя представленные на рисунке 2.7 построения, получим истинную величину радиуса вращения  $R^*$ .

При переносе этого значения на горизонтальную проекцию траектории перемещения точки  $A$  отметим ее новое положение  $A'_1$  после поворота. Фронтальная проекция  $A''_1$  расположена в проекционной связи на ФПГ  $h''$ . Таким образом определено новое положение точки  $A_1(A'_1, A''_1)$  после ее поворота до плоскости, параллельной плоскости проекций  $\pi_1$ .

Аналогичным образом можно выполнить вращение точки  $B$  вокруг фронтальной оси (рисунок 2.8)

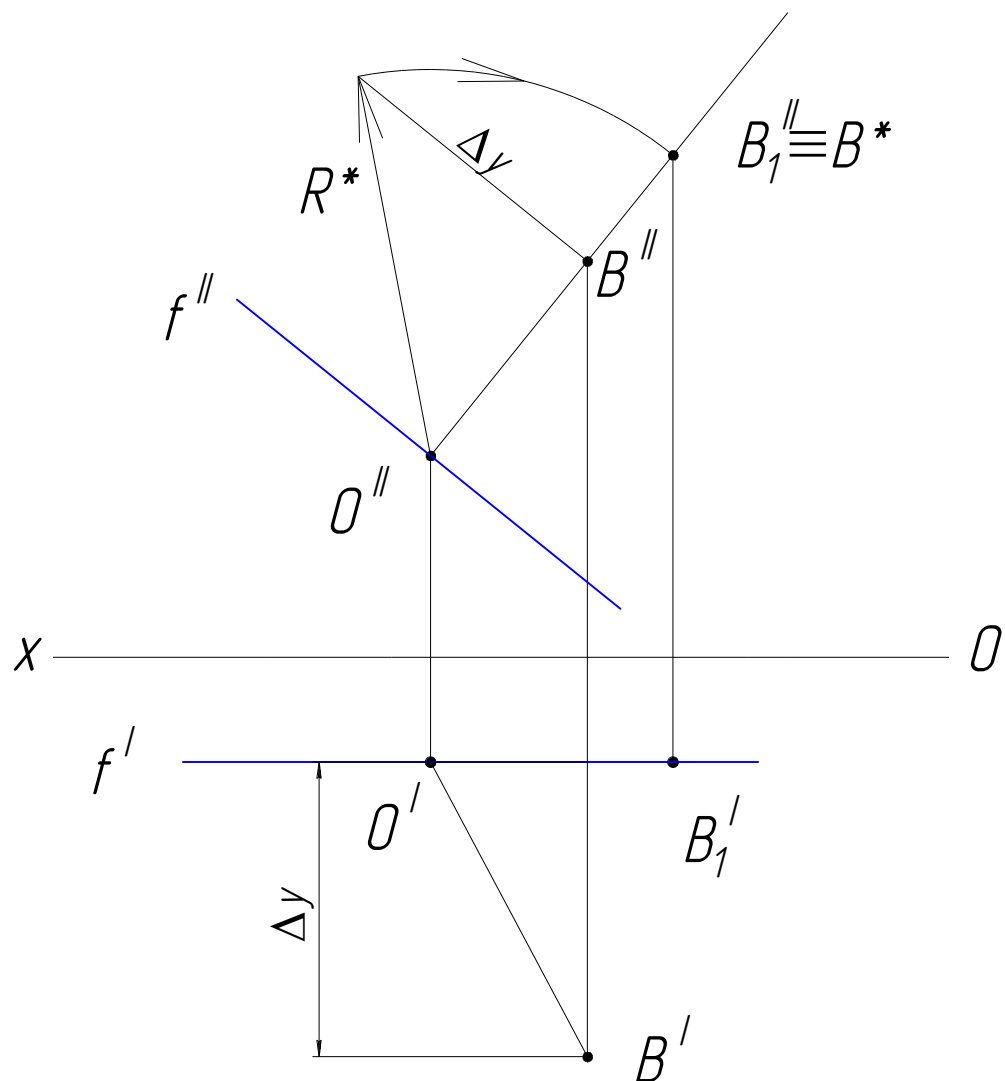


Рисунок 2.8 – Определение истинной длины радиуса вращения точки вокруг фронтальной оси

При вращении точки вокруг фронтальной оси вертикальная проекция точки перемещается по прямой, перпендикулярной к ФПГ  $f''$ . Когда точка расположится в плоскости, параллельной плоскости  $\pi_2$  и проходящей через фронталь, вертикальная проекция точки

$B_1''$  будет находиться на упомянутом перпендикуляре на расстоянии от ФПФ, равном истинной длине радиуса вращения, т.е.  $R^* = O''B_1'' = O''B^*$ .

Рассмотрим задачу по определению истинной величины плоской фигуры вращением вокруг оси, параллельной плоскости проекций.

Пример 2.2 Определить истинную величину треугольника  $ABC(A'B'C', A''B''C'')$  вращением вокруг горизонтали (рисунок 2.9).

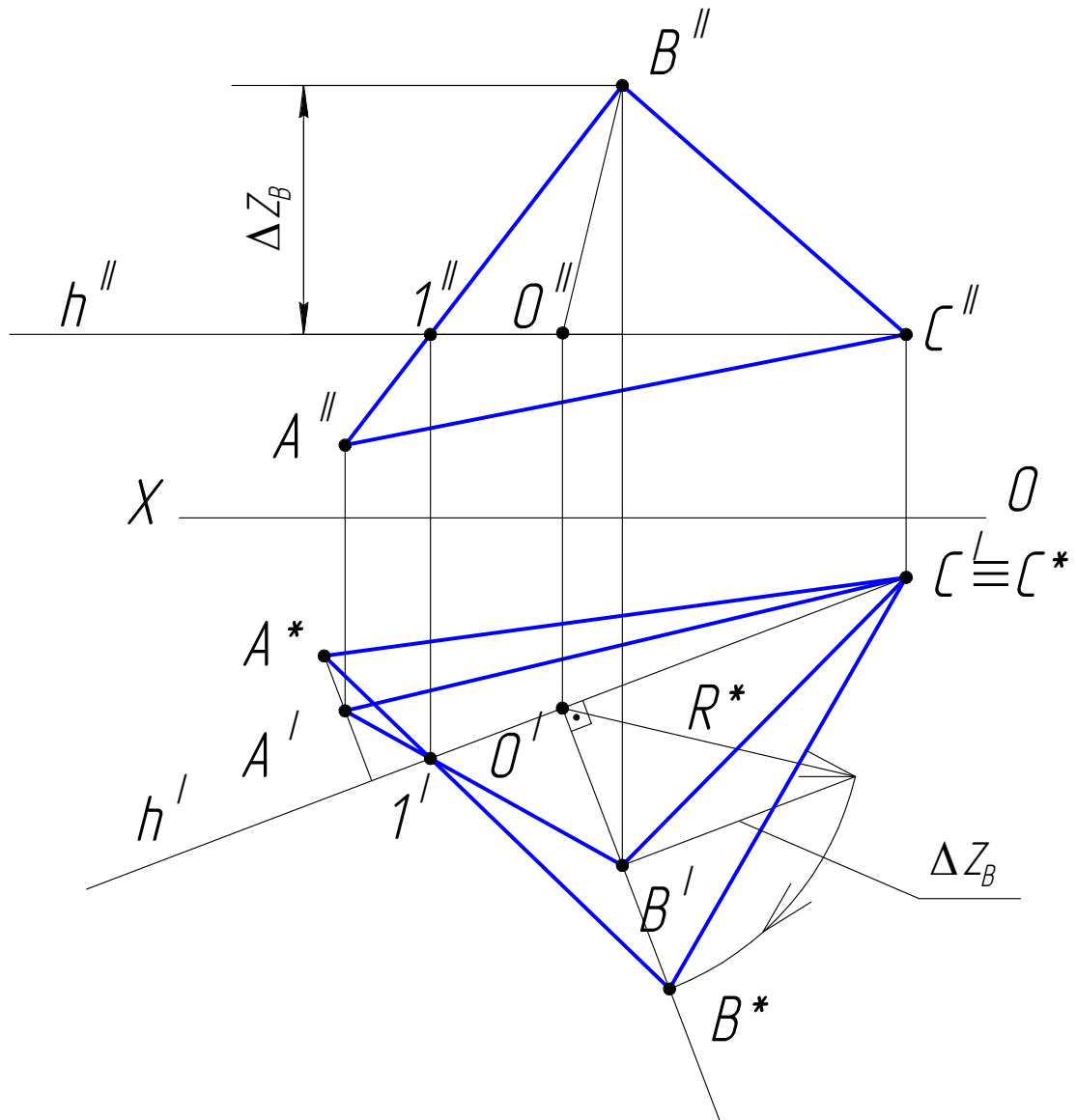


Рисунок 2.9 – Определение истинной величины треугольника вращением вокруг горизонтали

Для решения задачи построим в треугольнике горизонталь  $h(h', h'')$ , проходящую через одну из его вершин, например, вершину  $C(C', C'')$ . В этом случае точка  $C$  не будет изменять своего положения при вращении, т.к. находится на оси вращения, т.е.  $C^* \equiv C$ .

Вращение будет осуществляться до тех пор, пока плоскость треугольника не займет положение, параллельное горизонтальной плоскости проекций  $\pi_1$ . При этом новая фронтальная проекция треугольника  $ABC$  совпадет с фронтальной проекцией горизонтали

((на рисунке 2.9) не показана). Построим новую горизонтальную проекцию треугольника, равную его истинной величине  $A^*B^*C^*$ .

С этой целью проведем ФПГ  $C''1'' \parallel OX$  и в проекционной связи построим ГПГ  $C'1'$ . Центр вращения  $O(O', O'')$  точки  $B(B', B'')$  найдем, опустив перпендикуляр из точки  $B'$  на ГПГ ( $B'O' \perp C'1'$ ). Этот перпендикуляр определяет горизонтальную проекцию траектории перемещения точки  $B$  при вращении. Истинную величину радиуса вращения  $R^*$  найдем методом треугольника, откладывая на перпендикуляре к  $B'O'$  алгебраическую разность  $\Delta Z_B$ - расстояние от точки  $B''$  до фронтальной проекции горизонтали  $h''$ .

Полученный радиус  $R^*$  перенесем на траекторию перемещения точки  $B'$ , т.е. на продолжение отрезка  $B'O'$ . Полученная точка  $B^*$  является новой горизонтальной проекцией вершины  $B$  треугольника.

Для нахождения нового положения вершины  $A \equiv A^*$  можно либо выполнить построения аналогичные тем, что проводились для вершины  $B$ , либо провести прямую из точки  $B^*$  через неподвижную точку  $1'$  до пересечения с перпендикуляром, опущенным из точки  $A'$  на ГПГ  $C'1'$ . С учетом неизменности положения вершины  $C \equiv C^*$ , можно утверждать, что  $\Delta A^*B^*C^*$  есть истинная величина заданного треугольника.

### 2.3 Вращение плоскости вокруг одного из следов. Метод совмещения

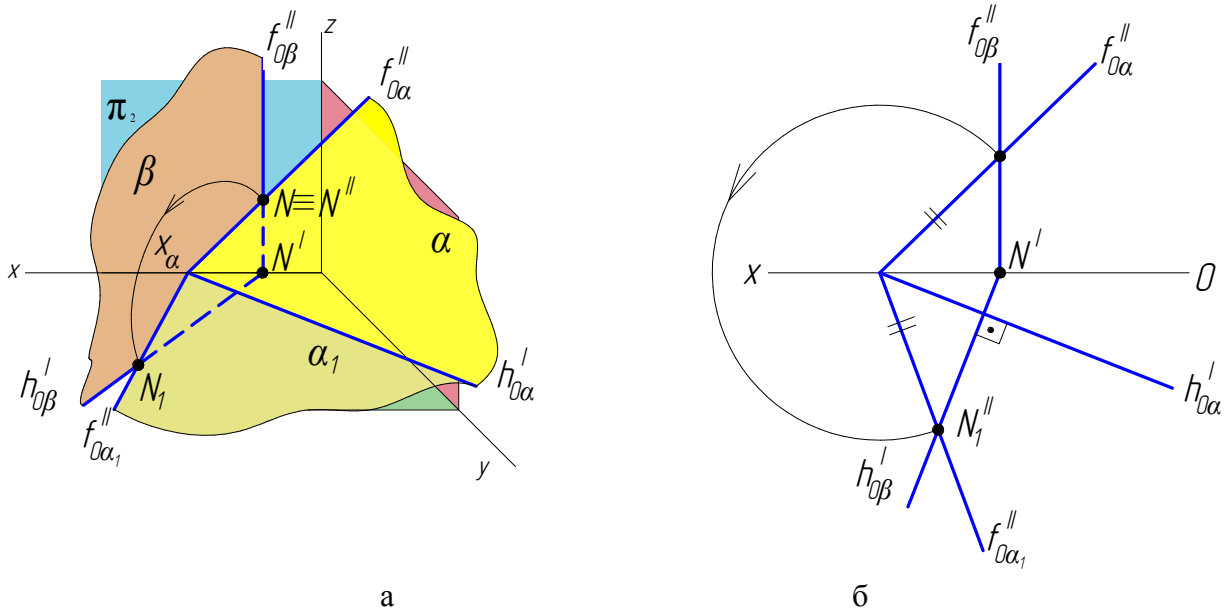
Сущность метода совмещения заключается в том, что заданную плоскость совмещают с плоскостью проекций. При этом геометрические элементы, расположенные в заданной плоскости, изображаются на упомянутой плоскости проекций в истинную величину и сохраняют взаимное расположение.

Метод совмещения предусматривает решение двух типов задач:

- определение истинных размеров геометрических элементов, расположенных в заданной плоскости, по их прямоугольным проекциям;
- построение прямоугольных проекций геометрических элементов, расположенных в заданной плоскости, по их размерам и форме;

Метод совмещения применим лишь в случае, если плоскость задана следами.

Преобразование проекций методом совмещения можно уяснить из следующих рассуждений. Плоскость общего положения  $\alpha(h'_{0\alpha}, f''_{0\alpha})$  вращается вокруг следа  $h'_{0\alpha}$  до совпадения с горизонтальной плоскостью проекций  $\pi_1$  (рисунок 2.10)



а – в аксонометрии;

б – на эпюре

Рисунок 2.10 – Построение совмещенного положения и произвольной плоскости

При этом преобразовании след  $h'_{0\alpha}$ , как ось вращения останется на месте. Поэтому для нахождения совмещенного положения плоскости  $\alpha_1$  достаточно найти совмещенное положение только одной, принадлежащей ей точки (не лежащей на следе  $h'_{0\alpha}$ ). В качестве такой точки (для упрощения геометрических построений) целесообразно взять точку  $N(N', N'')$ , принадлежащую фронтальному следу ( $N \in f''_{0\alpha}$ ).

Точка  $N(N', N'')$  при вращении вокруг оси  $h'_{0\alpha}$  будет перемещаться по другой окружности, принадлежащей плоскости  $\beta(h''_{0\beta}, f''_{0\beta})$ , перпендикулярной к оси вращения. При этом траекторией перемещения проекции  $N'$  будет прямая линия, также перпендикулярная этой оси вращения.

Положение нового фронтального следа  $f''_{0\alpha_1}$  при совмещенном положении плоскости  $\alpha_1$  можно найти, определив точку  $N_1$  пересечения дуги радиуса  $R = X_\alpha N''$  с продолжением прямой  $N'O' \perp h'_{0\alpha}$ .

При совмещении плоскости общего положения  $\alpha(h'_{0\alpha}, f''_{0\alpha})$  с плоскостью  $\pi_1$  (рисунок 2.11), совмещенное положение точки  $A_1$ , расположенной в плоскости  $\alpha$ , будет находиться на продолжении перпендикуляра, опущенного из горизонтальной проекции  $A'$  на след  $h'_{0\alpha}$ , на расстоянии от последнего равном длине радиуса вращения точки ( $R = KA$ ) (рисунок 2.11).

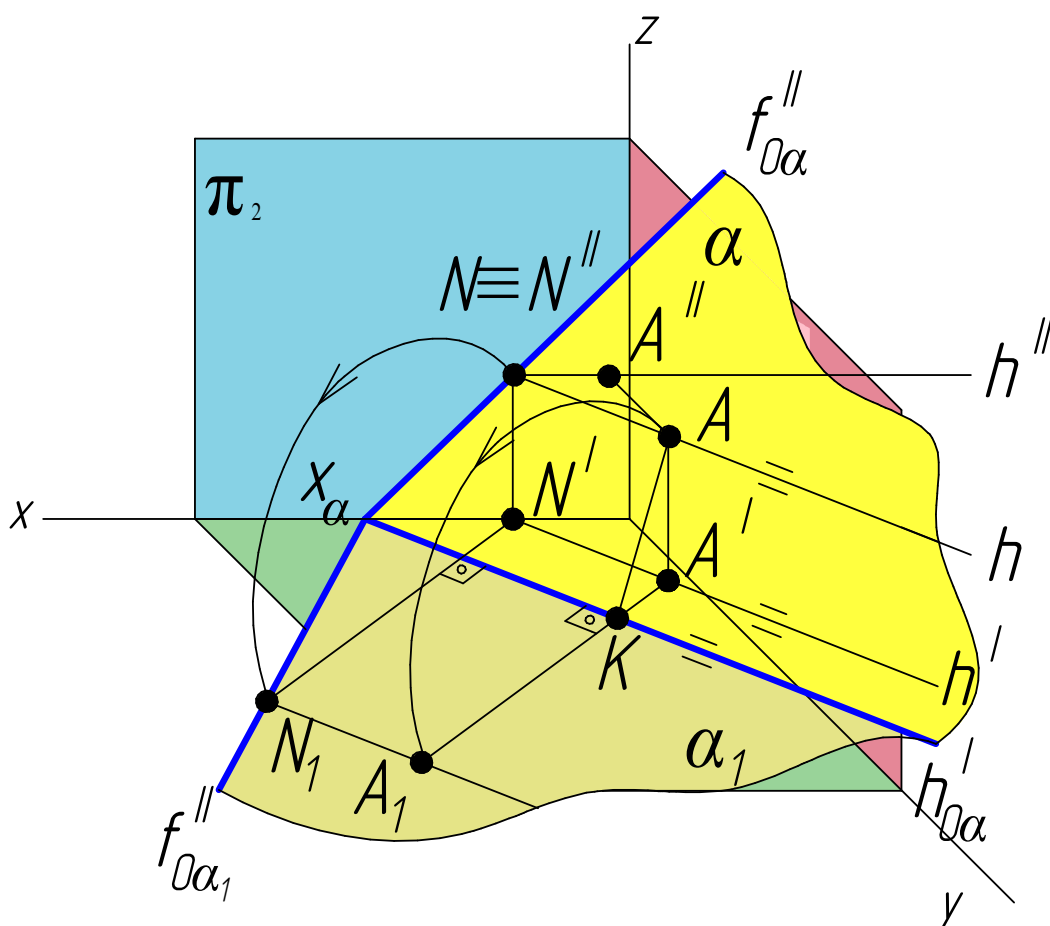


Рисунок 2.11 – Построение совмещенного положения плоскости  $\alpha$  и расположенной в ней точки  $A$

Радиус вращения  $KA$  можно найти как гипотенузу прямоугольного треугольника  $AKA'$ , катетами которого являются: расстояние  $A'K$  от горизонтальной проекции  $A'$  до следа  $h'_{0\alpha}$  и координата  $Z$  совмещаемой точки  $A$ . На эпюре выглядит следующим образом (рисунок 2.12):

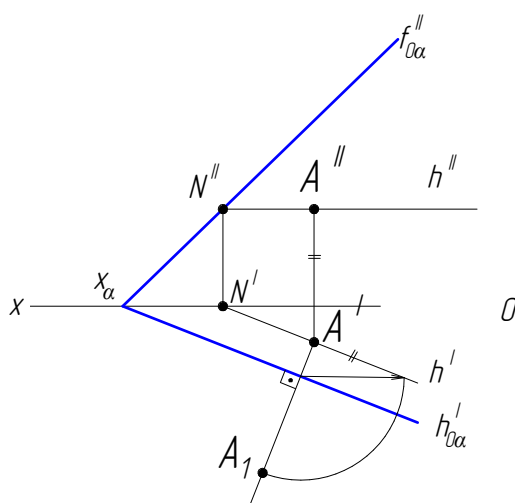


Рисунок 2.12 – Построение совмещенного положения точки с использованием метода треугольника

Совмещенное положение  $A_1$  произвольной точки  $A$ , лежащей в плоскости  $\alpha$ , можно также найти, построив предварительно совмещенное положение  $N_1$  фронтального следа  $N(N', N'')$  горизонтали  $h(h', h'')$ , которой принадлежит точка  $A$  (рисунок 2.13):

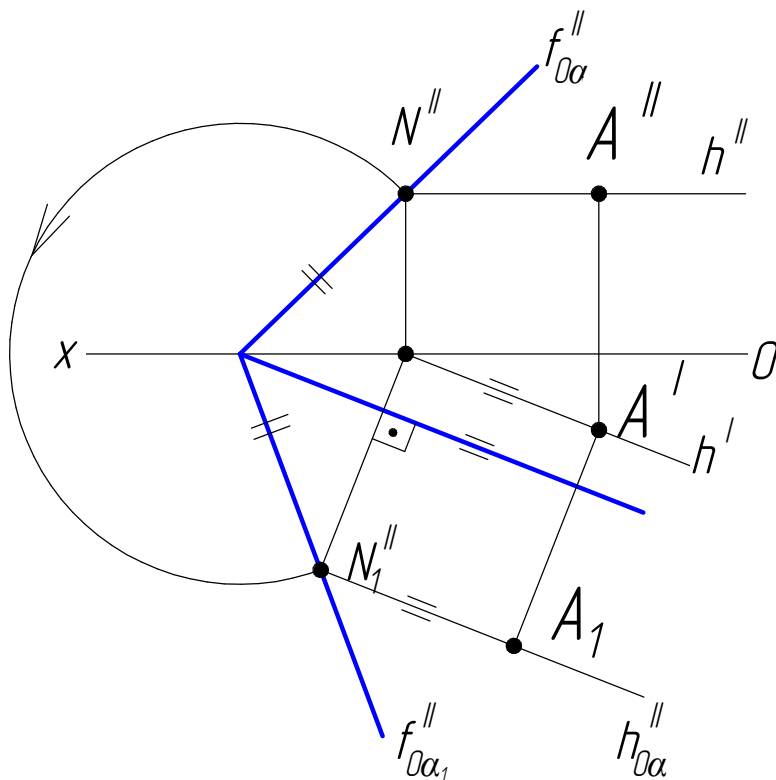


Рисунок 2.13 – Построение совмещенного положения произвольной точки при совмещении линии уровня плоскости

Горизонталь  $h$  в совмещенном положении  $h_1$  пройдет через точку  $N_1$  параллельно оси вращения  $h'_{0\alpha}$ . Совмещенное положение  $A_1$  точки  $A$  будет принадлежать совмещенному положению  $h_1$  этой горизонтали ( $A \in h \Rightarrow A_1 \in h_1$ ).

Как отмечалось ранее, траектория движения точки  $A$  в пространстве при вращении вокруг оси  $h'_{0\alpha}$  проецируется на плоскость  $\pi_1$  в прямую, перпендикулярную оси вращения ( $A'A_1 \perp h'_{0\alpha}$ ). Поэтому совмещенное положение точки  $A_1$  может быть определено как точка пересечения горизонтали  $h_1$  и горизонтальной проекции траектории движения точки  $A$ :  $A_1 = h_1 \cap A'A_1$ .

Проведя подобные построения для всех характерных точек геометрического объекта, можно определить все его метрические характеристики (периметр, площадь, углы и т.д.).

### 3 Метод перемены плоскостей проекции (ППП)

В рассмотренных ранее способах преобразования проекций геометрический объект изменял свое положение относительно неподвижной системы плоскостей проекции.

Метод перемены плоскостей проекций заключается в выборе новой плоскости проекций. При этом геометрический объект остается неизменным.

При выборе нового положения плоскости проекций следует соблюдать основной принцип ортогонального проецирования, т.е. новая плоскость должна располагаться



перпендикулярно одной из основных исходных плоскостей проекции  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$ . При этом необходимо руководствоваться тем, чтобы по отношению к новой плоскости проецируемая фигура занимала частное положение, обеспечивающее получение проекций, наиболее удобных для решения поставленной задачи.

Систему плоскостей проекции будем обозначать как совокупность оси и плоскостей, которые ее образуют. Исходная плоскость проекции обозначается  $X \frac{\pi_2}{\pi_1}$ , а вновь введенная  $X_1 \frac{\pi_1}{\pi_4}$ .

Проекции точек на новую плоскость будем обозначать  $A^{IV}, B^{IV}, C^{IV} \dots$  (условимся, что новые фронтальные плоскости проекций будем обозначать четными числами, а новые горизонтальные нечетными).

На рисунке 3.1 показан принцип перемены плоскостей проекции.

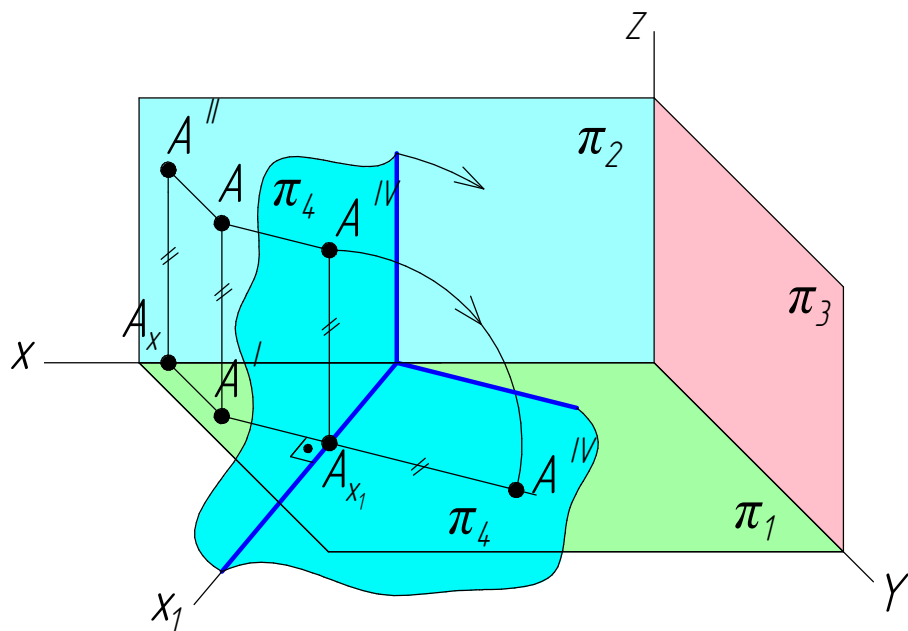


Рисунок 3.1 – Замена фронтальной плоскости  $\pi_2$  на новую плоскость  $\pi_4 \perp \pi_1$ .

При замене плоскости  $\pi_2$  на новую фронтальную плоскость  $\pi_4$ , перпендикулярную горизонтальной плоскости проекций  $\pi_1$ , координата  $Z_A$  проецируемой точки  $A$  остается неизменной:  $Z_A = AA' = A''A_x = A^{IV}A_{x1}$ .

Чтобы перейти от аксонометрического изображения к эпюру, необходимо совместить плоскость  $\pi_4$  с плоскостью  $\pi_1$ , вращая ее вокруг оси  $X_1$  на угол  $90^\circ$ . Поворот следует выполнять так, чтобы новые проекции не накладывались на старые.

Нетрудно заметить, что при этом горизонтальная проекция точки  $A'$  и новая фронтальная проекция точки  $A^{IV}$  расположатся на одном перпендикуляре к оси  $X_1$ , т.е. будут находиться в проекционной связи в системе  $X_1 \frac{\pi_1}{\pi_4}$ .

Таким образом, для того чтобы по заданным проекциям точки  $A(A', A'')$  построить новую фронтальную проекцию  $A^{IV}$  необходимо из горизонтальной проекции точки  $A'$

провести перпендикуляр к оси  $X_1$  и на нем отложить от этой оси с учетом знака неизменную координату  $Z_A$  (рисунок 3.2):

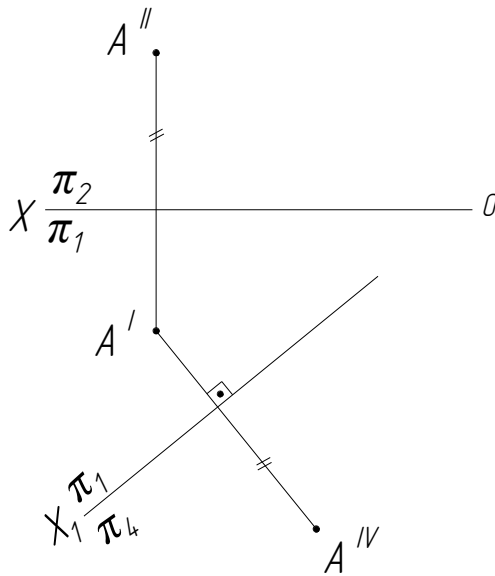


Рисунок 3.2 – Эпюр точки  $A$  с учетом перемены фронтальной плоскости проекций

Аналогичные преобразования можно проводить, вводя новую горизонтальную плоскость проекции  $\pi_5$ , перпендикулярную исходной плоскости  $\pi_2$ .

Для построения новой горизонтальной проекции точки  $B^V$  при заданном эпюре точки  $B(B', B'')$  и новой выбранной оси  $X_1$  следует из фронтальной проекции точки  $B''$  провести перпендикуляр к оси  $X_1$  и на нем отложить от этой оси неизменную координату  $Y_B$ , взятую из системы  $X \frac{\pi_2}{\pi_1}$  (рисунок 3.3):

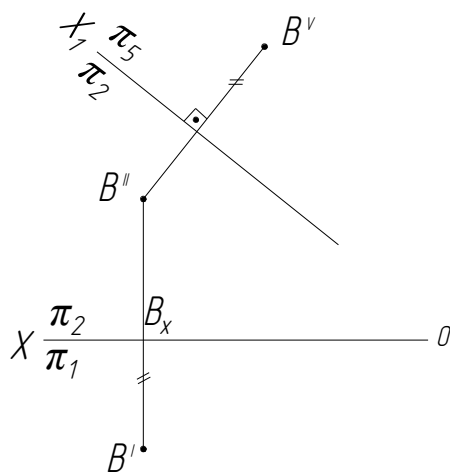


Рисунок 3.3 – Эпюр точки  $B$  с учетом перемены горизонтальной плоскости проекций

Последовательную перемену плоскостей проекции можно проводить столько раз, сколько требуется для решения поставленной задачи.

Рассмотрим пример построения новых проекций точки при последовательной перемене двух плоскостей проекции.

Пример 3.1 При заданном положении точки  $A(A', A'')$  в системе  $X \frac{\pi_2}{\pi_1}$  требуется последовательно заменить плоскость  $\pi_2$  на новую фронтальную плоскость  $\pi_4$ , а затем плоскость  $\pi_1$  - на новую горизонтальную плоскость  $\pi_5$ . Плоскости  $\pi_4$  и  $\pi_5$  должны образовать новую систему плоскостей проекций  $X_2 \frac{\pi_4}{\pi_5}$ .

Для решения задачи вначале проведем ось  $X_1$ , образующую систему  $X_1 \frac{\pi_1}{\pi_4}$  (рисунок 3.4):

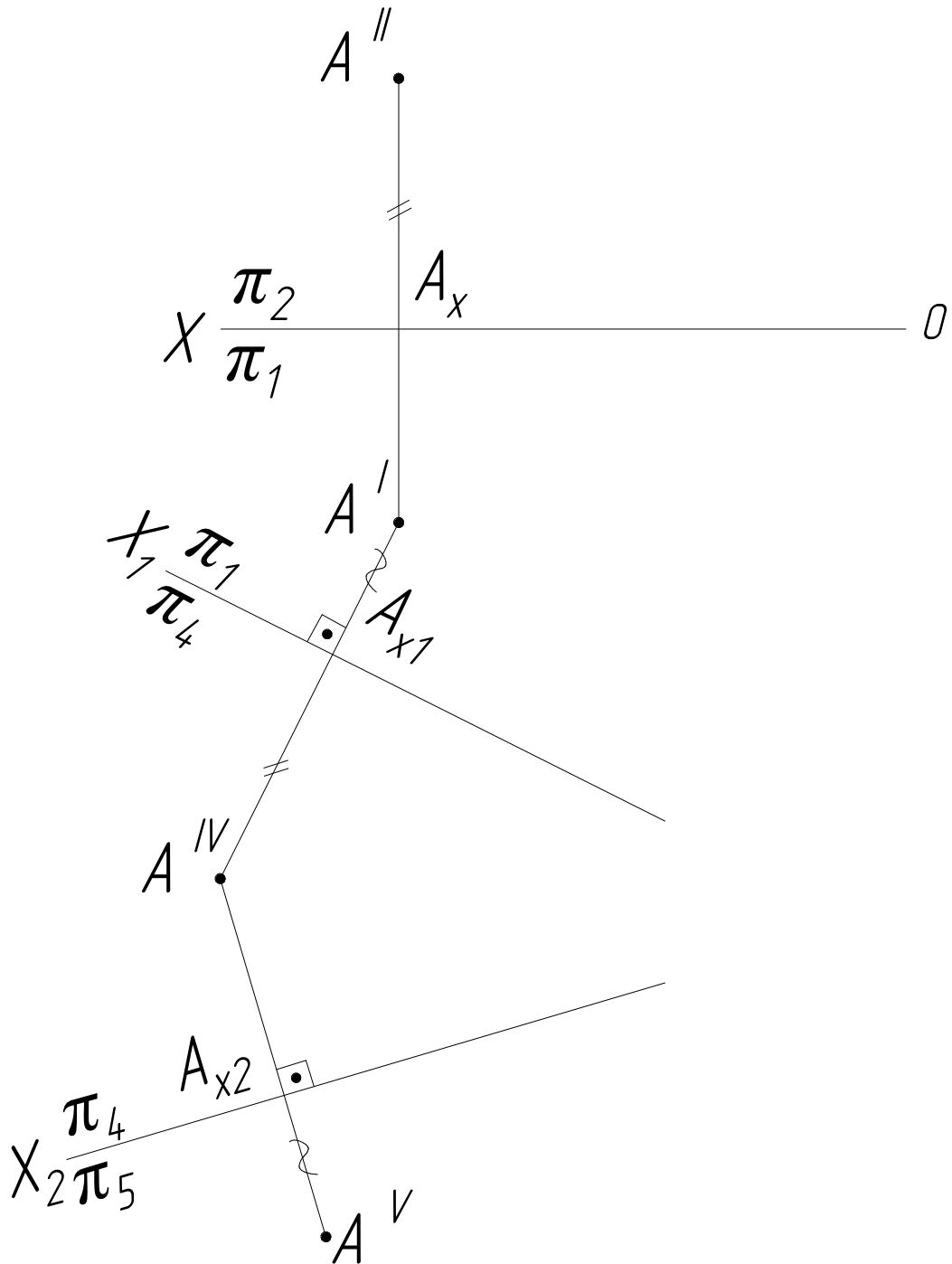


Рисунок 3.4 – Последовательная перемена двух плоскостей проекции

На перпендикуляре, опущенном из точки  $A'$  на ось  $X_1$ , отложим от этой оси неизменную координату  $Z_A = A_x A''$ . При этом в системе  $X_1 \frac{\pi_1}{\pi_4}$  получим новую фронтальную проекцию  $A^{IV}$ . В этой системе плоскостей проекции координата  $Y_A$  равна отрезку  $A_{X_1} A'$  ( $Y_A = A_{X_1} A'$ ), а координата  $Z_A = A_{X_1} A^{IV}$ . Далее заменим плоскость  $\pi_1$  в этой системе на новую плоскость  $\pi_5$ , перпендикулярную плоскости  $\pi_4$  ( $\pi_5 \perp \pi_4$ ). С этой целью проведем ось  $X_2$  и во вновь образованной системе  $X_2 \frac{\pi_4}{\pi_5}$  построим новую горизонтальную проекцию  $A^V$ . На перпендикуляре, опущенном из точки  $A^{IV}$  на ось  $X_2$  отложим неизменную координату  $Y_A = A_{X_1} A'$ , взятую из системы  $X_1 \frac{\pi_1}{\pi_4}$ . Полученная при этом точка  $A^V$  есть новая горизонтальная проекция точки  $A$  при двукратной последовательной перемене плоскостей проекции.

Следует отметить, что при многократной перемене плоскостей проекций для построения новых проекций точек значение неизменной координаты следует брать только из непосредственно предыдущей системы плоскостей проекции.

### 3.1 Определение истинной длины отрезка методом ППП

Решение задачи по определению истинной длины отрезка прямой общего положения методом ППП предусматривает проецирование прямой на новую плоскость проекции, параллельную этой прямой.

Спроецируем заданный отрезок  $AB(A'B', A''B'')$  прямой общего положения (рисунок 3.5) на новую плоскость проекции  $\pi_4$ , параллельную ему и перпендикулярную плоскости  $\pi_1$ . С этой целью проведем новую ось  $X_1 \parallel A'B'$ , чтобы в системе  $X_1 \frac{\pi_1}{\pi_4}$  заданный отрезок занял положение фронтальной прямой (напомним, что у фронтальной прямой ГПФ всегда параллельна оси).

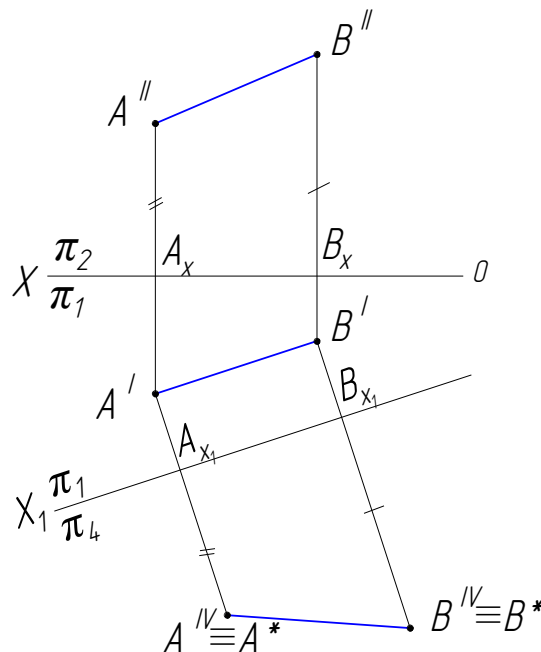


Рисунок 3.5 – Определение истинной длины отрезка прямой общего положения

Новые фронтальные проекции точек  $A$  и  $B$  в системе  $X_1 \frac{\pi_1}{\pi_4}$  найдем, откладывая на перпендикулярах опущенных из точек  $A'$  и  $B'$  на ось  $X_1$ , отрезки  $A_{X_1}A^{IV} = A_X A'' = Z_A$  и  $B_{X_1}B^{IV} = B_X B'' = Z_B$ , характеризующие неизменные координаты  $Z$  концов заданного отрезка.

Проекция  $A^{IV}B^{IV} = A^*B^*$  является истинной длиной отрезка т.к. в системе  $X_1 \frac{\pi_1}{\pi_4}$  отрезок  $AB$  расположен параллельно плоскости  $\pi_4$ .

Следует помнить, что если концы заданного отрезка имеют разные по знаку координаты, то значения этих координат откладываются в противоположенные стороны по отношению к новой оси координат.

В случае, если отрезок  $AB$  требуется расположить перпендикулярно плоскости проекций, то задачу решают последовательной переменей двух плоскостей проекции. Сначала заданную прямую проецируют на плоскость, параллельную этой прямой в системе  $X_1 \frac{\pi_1}{\pi_4}$ , а затем – на плоскость, перпендикулярную к этой прямой и к предыдущей плоскости проекций в системе  $X_2 \frac{\pi_4}{\pi_5}$  (рисунок 3.6):

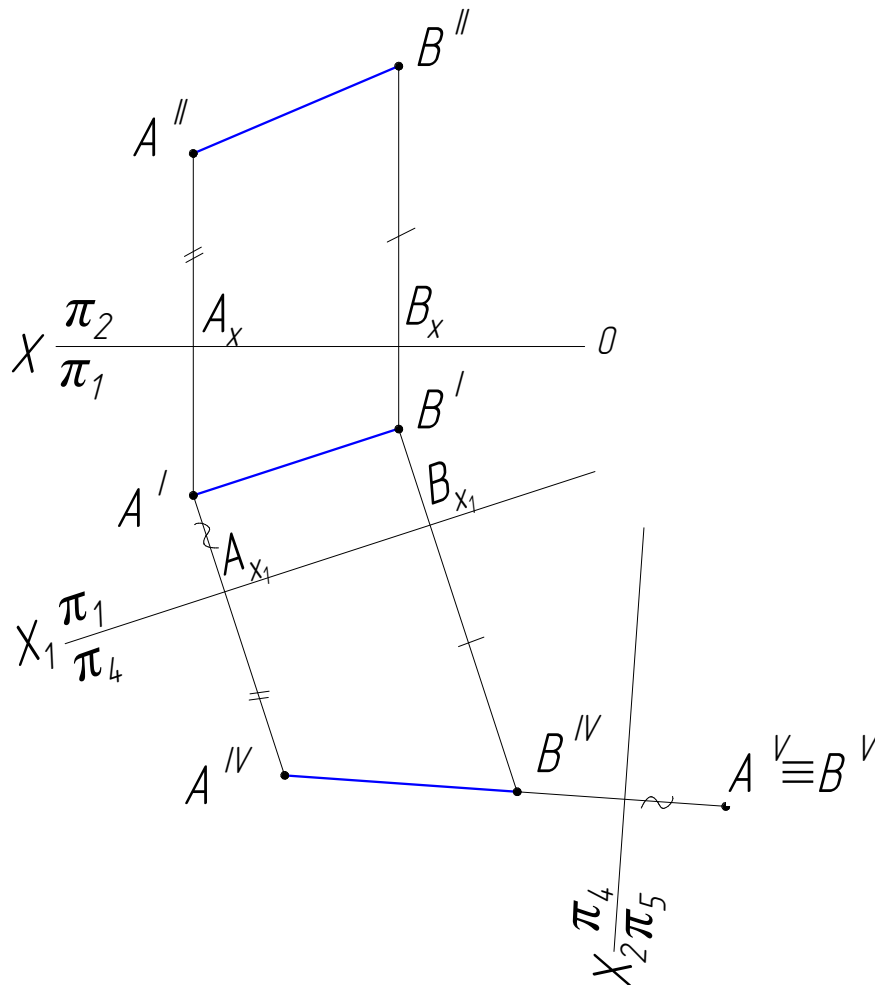


Рисунок 3.6 – Проецирование отрезка прямой общего положения на перпендикулярную ему плоскость

### 3.2 Построение новых проекций плоскости общего положения методом ППП

Рассмотрим порядок построения новых следов плоскости при изменении положения одной из плоскостей проекции.

Пусть дано аксонометрическое изображение плоскости общего положения  $\alpha(h'_{0\alpha}, f''_{0\alpha})$  (рисунок 3.7):

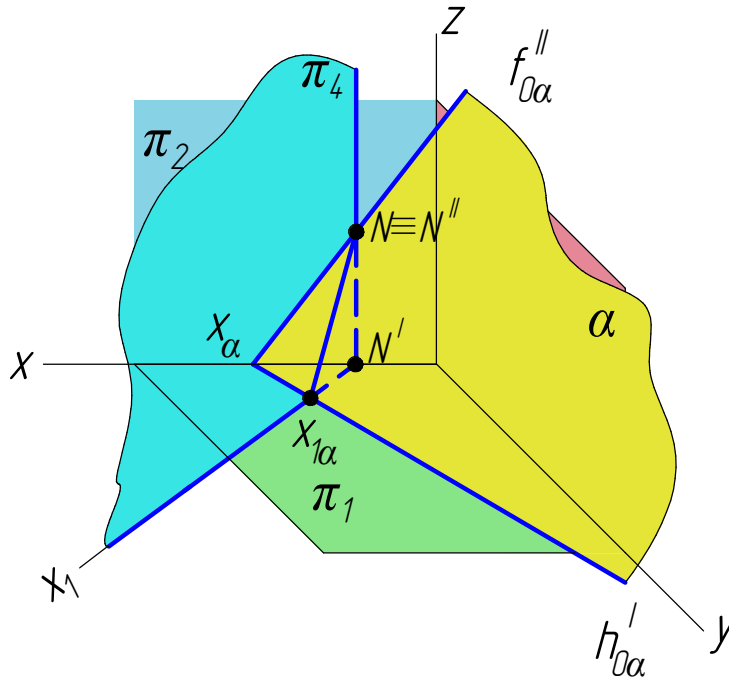


Рисунок 3.7 – Построение нового следа заданной плоскости при перемене фронтальной плоскости проекций

Введем на чертеже новую фронтальную плоскость проекции  $\pi_4$ , перпендикулярную плоскости  $\pi_1$  ( $\pi_4 \perp \pi_1$ ). Ее горизонтальный след будет новой осью  $X_1$ . В системе  $X_1 \frac{\pi_1}{\pi_4}$  след  $h'_{0\alpha}$  сохранится прежним. Новым фронтальным следом плоскости  $\alpha$  будет линия пересечения плоскостей  $\alpha$  и  $\pi_4$ . Изображение этого следа  $f''_{0\alpha}$  получим, соединяя прямой линией точки пересечения одноименных следов данных плоскостей (точки  $X_{1\alpha}$  и  $N$ ). Точка  $X_{1\alpha}$  – новая точка схода следов плоскости  $\alpha$  в системе  $X_1 \frac{\pi_1}{\pi_4}$ .

На рисунке 3.8 показано построение нового фронтального следа плоскости  $\alpha$  в ортогональной системе координат. С этой целью проведем произвольную ось  $X_1$ . Новую точку схода следов плоскости  $\alpha$  в системе  $X_1 \frac{\pi_1}{\pi_4}$  имеем в пересечении следа  $h'_{0\alpha}$  с осью  $X_1$ . Вторую точку  $N''$  следа  $f''_{0\alpha}$  найдем, построив новую фронтальную проекцию точки  $N$  пересечения фронтальных следов плоскостей  $\alpha$  и  $\pi_4$  (рисунок 3.7). Ее горизонтальная проекция  $N'$  расположена в точке пересечения осей  $X_1$  и  $OX$ , а фронтальная проекция  $N''$  – в пересечении перпендикуляра, восстановленного из точки  $N'$  к оси  $OX$ , со следом  $f''_{0\alpha}$ .

Новую фронтальную проекцию  $N^{IV}$  найдем, отложив на перпендикуляре к оси  $X_1$ , восстановленном из точки  $N'$ , значение неизменной координаты  $Z_N$ .

Прямая, проведенная из точки  $X_{1\alpha}$  через точку  $N^{IV}$ , будет новым фронтальным следом  $f_{0\alpha}^{IV}$ .

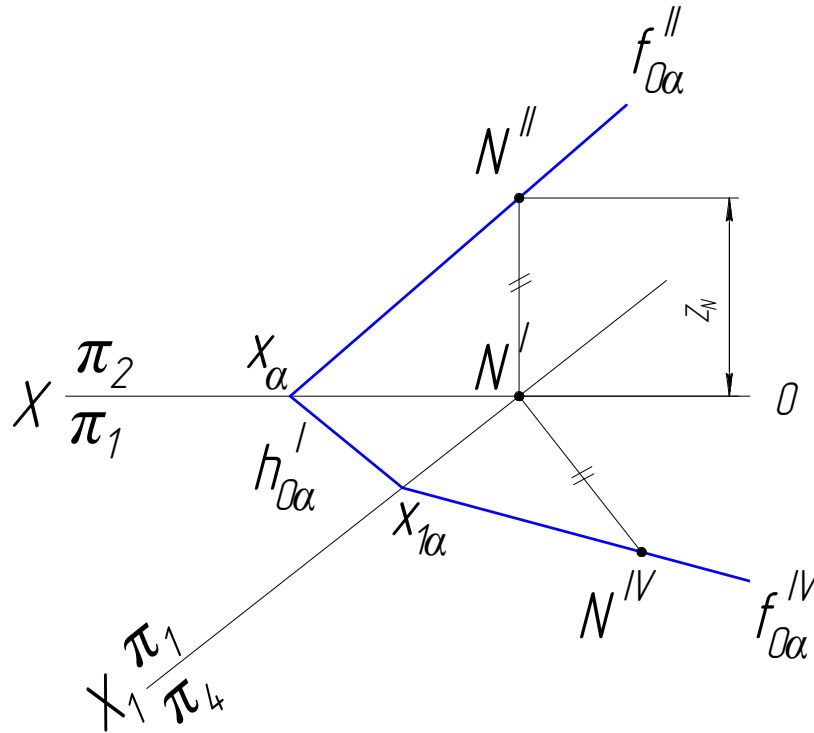


Рисунок 3.8 – Эпюр следов плоскости при изменении положения фронтальной плоскости

### 3.2.1 Преобразование плоскости общего положения в частное методом перемены плоскостей проекций

Для облегчения решения многих метрических задач часто плоскость общего положения целесообразно преобразовать в частное, то есть сделать ее проецирующей.

На рисунке 3.9 показано преобразование произвольно расположенной плоскости  $\alpha$  во фронтально-проецирующую плоскость.

Известно (часть 1, раздел 5.6.1.2), что горизонтальный след фронтально-проецирующей плоскости перпендикулярен оси  $OX$ .

Следовательно, чтобы плоскость  $\alpha$  заняла фронтально-проецирующее положение, необходимо новую ось  $X_1$  провести перпендикулярно горизонтальному следу  $h'_{0\alpha}$ . Через точку пересечения  $X_{1\alpha} = h'_{0\alpha} \cap X_1$  пройдет искомый след  $f_{0\alpha}^{IV}$ . Для определения его направления достаточно найти еще одну точку, принадлежащую этому следу. В качестве такой точки можно взять произвольную точку  $N \in \alpha (N'' \in f_{0\alpha}'')$  и построить ее фронтальную проекцию  $N^{IV}$  на новой плоскости  $\pi_4$  с учетом неизменности координаты

$Z_N$ . Через точки  $X_\alpha$  и  $N^{IV}$  строим новый фронтальный след  $f_{0\alpha}^{IV}$ . Таким образом, в системе  $X_1 \frac{\pi_1}{\pi_4}$  плоскость  $\alpha$  заняла положение фронтально-проецирующей плоскости.

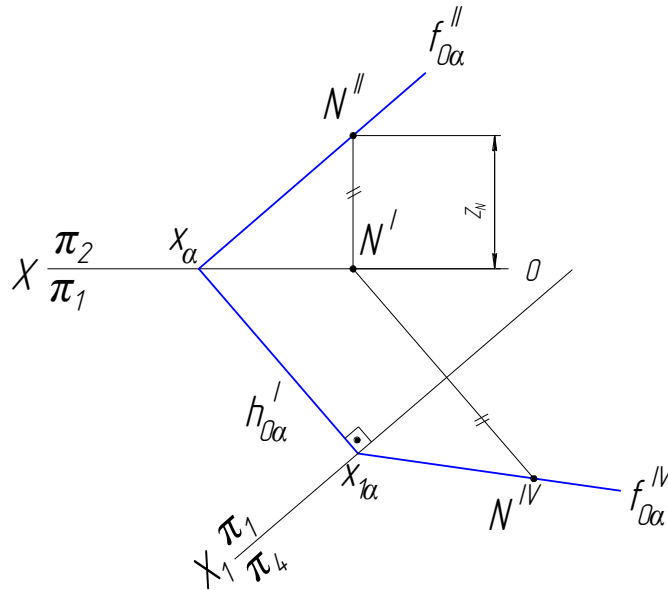


Рисунок 3.9 – Преобразование плоскости общего положения во фронтально-проецирующую.

На рисунке 3.10 показано преобразование плоскости общего положения в горизонтально-проецирующую плоскость, у которой фронтальный след перпендикулярен оси  $X_1$ . Новый горизонтальный след  $h_{0\alpha}^V$  построен с учетом неизменности координаты  $Y$  любой точки этой плоскости (в том числе и находящейся следе  $h'_{0\alpha}$ ) при проецировании на новую горизонтальную плоскость  $\pi_5 \perp \pi_2$ .

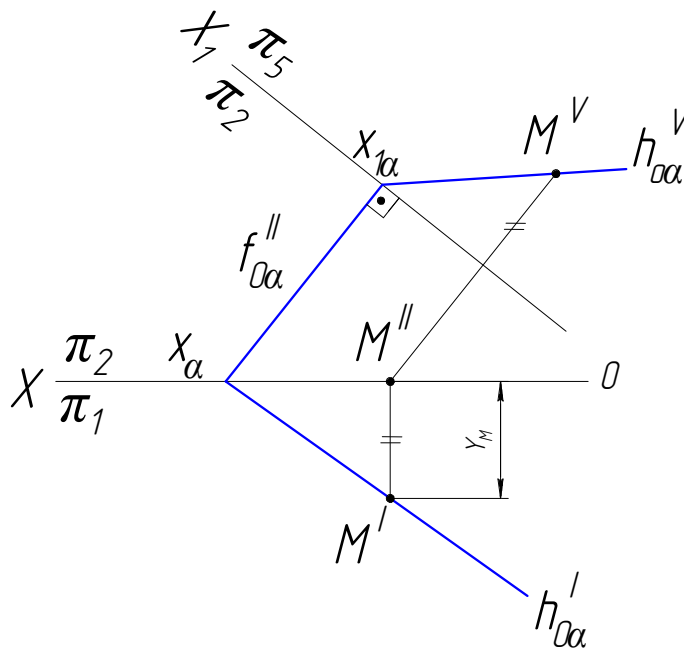


Рисунок 3.10 – Преобразование плоскости общего положения в горизонтально-проецирующую



Рассмотрим на примере целесообразность преобразования плоскости общего положения в частное методом перемены плоскостей проекции.

Пример 3 Построить проекции линии пересечения плоскости  $\alpha(h'_{0\alpha}, f''_{0\alpha})$  с плоскостью треугольника  $ABC(A'B'C', A''B''C'')$  (рисунок 3.11):

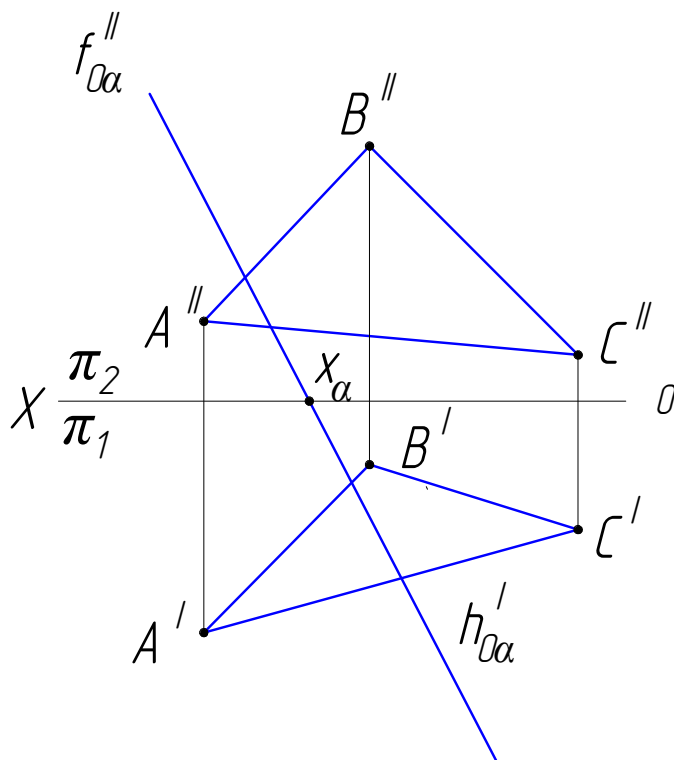


Рисунок 3.11 – Задание к примеру 3

В данной задаче плоскость  $\alpha$  является плоскостью общего положения со сливающимися следами. Проекцию линии пересечения этой плоскости с плоскостью треугольника можно определить сразу, если плоскость  $\alpha$  преобразовать в проецирующую, например, фронтально-проецирующую. С этой целью новую ось  $X_1$  проводим перпендикулярно следу  $h'_{0\alpha}$  ( $X_1 h'_{0\alpha}$ ). С учетом неизменности координаты  $Z_N$  произвольной точки  $N \in \alpha (N'' \in f''_{0\alpha})$  строим новый фронтальный след плоскости  $f''_{0\alpha}$  в системе  $X_1 \frac{\pi_1}{\pi_4}$ . Он пройдет через точки  $X_{1\alpha}$  и  $N^{IV}$ .

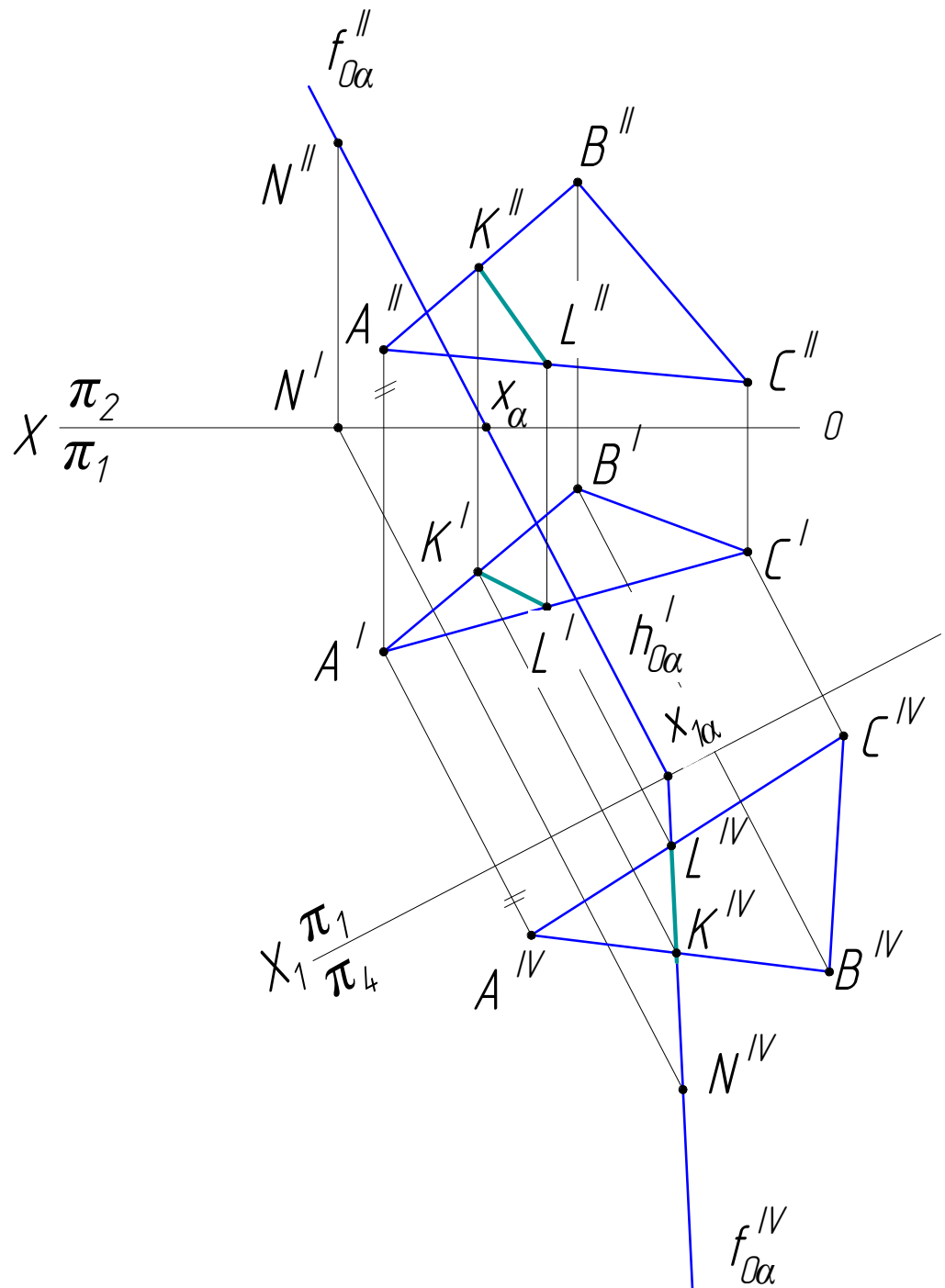


Рисунок 3.12 – Построение проекций линии пересечения плоскости общего положения с плоской фигурой методом ППП.

В этой же системе  $X_1 \frac{\pi_1}{\pi_4}$  строим новую фронтальную проекцию треугольника  $A^{IV}B^{IV}C^{IV}$ , проводя линии проекционной связи из точек  $A'B'C'$  относительно оси  $X_1$  и откладывая на них значения  $Z_A, Z_B,$  и  $Z_C$ , измеренные на фронтальных проекциях точек  $A''B''C''$ .

С учетом основного свойства фронтально-проецирующей плоскости (часть 1, раздел 5.6.1.2) утверждаем, что отрезок  $K^{IV}L^{IV}$  является фронтальной проекцией линии пересечения заданных плоскостей.

Соблюдая проекционные связи относительно соответствующих осей координат, можно построить проекции линии пересечения в исходной системе плоскостей проекции  $X \frac{\pi_2}{\pi_1} - K'L'$  и  $K''L''$ .

### 3.2.2 Определение истинной величины плоской фигуры методом ППП

Если плоская фигура расположена в плоскости общего положения, то также целесообразно использовать метод перемены плоскостей проекции для проведения этой фигуры в частное положение, например, при определении ее метрических параметров (площади, периметра, углов и т.д.).

Рассмотрим это на примере.

Пример 4 Определить истинную величину треугольника  $ABC(A'B'C', A''B''C'')$  (рисунок 3.13):

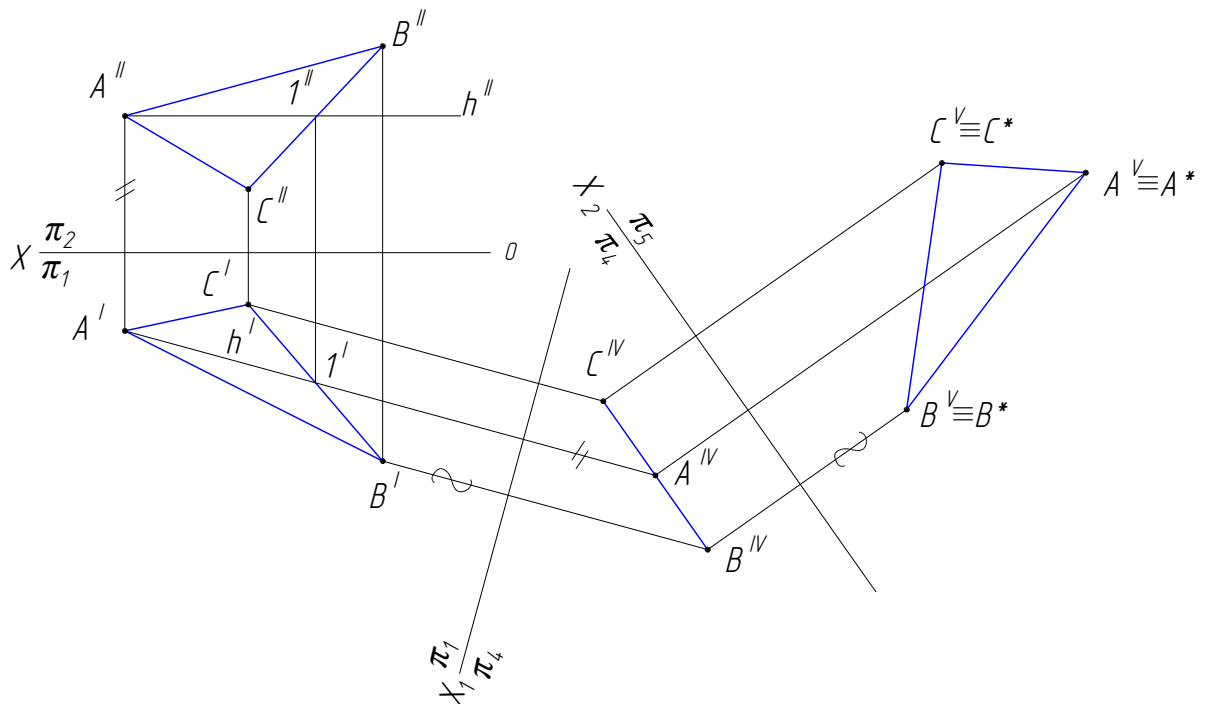


Рисунок 3.13 – Определение истинной величины плоской фигуры методом ППП

Задача решается двумя последовательными переменами плоскостей проекции. В начале вводим новую фронтальную плоскость  $\pi_4$ , которая будет одновременно перпендикулярна и плоскости  $\pi_1$  ( $\pi_4 \perp \pi_1$ ) и плоскости заданного треугольника ( $\pi_4 \perp \Delta ABC$ ). При этом образуется система плоскостей проекции  $X_1 \frac{\pi_1}{\pi_4}$ . С этой целью проводим в треугольнике горизонталь  $h(h', h'')$ , например, через точку  $A(A', A'')$ , т.е. вначале строим  $A''1'' \parallel OX$ , а затем в проекционной связи -  $A'1'$ . Плоскость  $\pi_4$  располагаем перпендикулярно горизонтали, т.е. проводим новую ось  $X_1$  перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали ( $X_1 \perp h'$ ). При таком положении плоскости  $\pi_4$  треугольник  $ABC$  становится проецирующим, поэтому проецируется на нее в виде прямой линии. Построение проекции  $A^{IV}B^{IV}C^{IV}$  проводится в проекционной связи с  $A'B'C'$  относительно оси  $X_1$  с учетом неизменности координат  $Z$  вершин заданного треугольника, измеренных на плоскости  $\pi_2$  в системе  $X \frac{\pi_2}{\pi_1}$ .

Поскольку в системе  $X_1 \frac{\pi_1}{\pi_4}$  плоскость треугольника  $ABC$  стала проецирующей, то следующую новую плоскость проекции  $\pi_5$  расположим параллельно плоскости треугольника ( $\pi_5 \parallel \Delta ABC$ ). При этом ось  $X_2$  пройдет параллельно проекции  $A^{IV}B^{IV}C^{IV}$ . На плоскость  $\pi_5$  треугольник с проецируется в виде  $A^{IV}B^{IV}C^{IV} \equiv A^*B^*C^*$ . Эта проекция построена в проекционной связи с  $A^{IV}B^{IV}C^{IV}$  относительно оси  $X_2$  с учетом неизменности координат  $Y$  вершин треугольника, измеренных на плоскости  $\pi_1$  в предыдущей системе плоскостей проекции  $X_1 \frac{\pi_1}{\pi_4}$ .

Таким образом, заданный треугольник с проецировался на параллельную ему плоскость  $\pi_5$  в виде  $A^*B^*C^*$ , т.е. без искажения.

В общем случае алгоритм решения задач по определению истинной величины плоской фигуры методом перемены плоскостей проекции выглядит следующим образом:

- в заданной фигуре провести горизонталь или фронталь;
- первой переменной новую плоскость проекции расположить перпендикулярно построенной горизонтали или фронтали. С этой целью провести ось  $X_1$  перпендикулярно ГПГ или ФПФ. Фигура при этом спроецируется на новую плоскость в виде прямой линии, т.е. станет проецирующей.
- вторую новую плоскость проекции расположить параллельно фигуре, т.е. провести  $X_2$  параллельно прямой линии, в которую предварительно спроецировалась фигура. В результате на вторую новую плоскость проекции заданная фигура проецируется без искажения, т.е. в истинную величину.

### 3.3 Определение кратчайших расстояний между геометрическими элементами

Рассмотрим последовательно следующие задачи по определению кратчайших расстояний:

- 1 Расстояние между двумя точками
- 2 Расстояние от точки до прямой
- 3 Расстояние между двумя параллельными прямыми
- 4 Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми
- 5 Расстояние от точки до плоскости
- 6 Расстояние от прямой до параллельной ей плоскости
- 7 Расстояние между двумя параллельными плоскостями

#### 3.3.1 Расстояние между двумя точками

Расстояние между двумя точками определяется длиной отрезка прямой линии, соединяющей эти точки. Построение истинной длины отрезка методом перемены плоскостей проекции достаточно подробно рассмотрено в разделе 3.1. Напомним лишь, что новая плоскость проекции располагается параллельно заданному отрезку, т.е. отрезок проводят в положение либо фронтали, либо горизонтали.

### 3.3.2 Расстояние от точки до прямой

Расстояние от точки до прямой определяется длиной перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую. Для нахождения истинной величины этого перпендикуляра его следует расположить параллельно плоскости проекции. Необходимо, чтобы заданная прямая при этом заняла положение проецирующей прямой, т.е. с проецировалась на плоскость в виде точки.

На рисунке 3.14 показана истинная величина расстояния  $A^*K^*$  от точки  $A(A', A'')$  до прямой  $BC(B'C', B''C'')$  в случае, если эта прямая исходно занимала проецирующее положение относительно плоскости  $\pi_1$  ( $BC \perp \pi_1$ ).

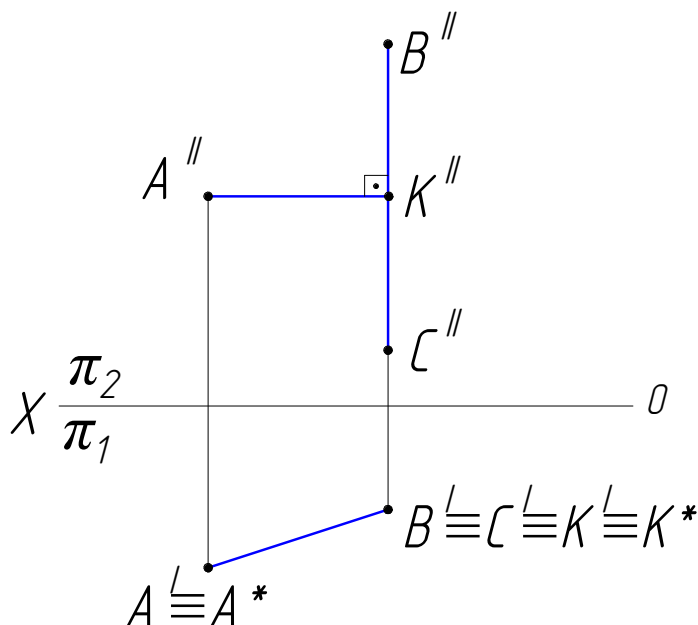


Рисунок 3.14 – Определение кратчайшего расстояния от точки до проецирующей прямой

Поскольку прямая  $BC(B'C', B''C'')$  перпендикулярна плоскости  $\pi_1$ , то перпендикуляр к ней  $AK$  будет параллелен этой плоскости проекций и с проецируется на нее без искажения ( $A'K' \equiv A^*K^*$ ).

Если же прямая изначально занимает общее положение, то ее необходимо предварительно привести в положение, перпендикулярное плоскости проекций (раздел 3.1, рисунок 3.5).

На рисунке 3.15 представлена последовательность операций по трансформации прямой  $BC(B'C', B''C'')$  из общего положения в начале в линию уровня ( $B^IV C^IV$  фронтальная проекция фронтали) в системе  $X_1 \frac{\pi_1}{\pi_4}$ , а затем в проецирующую прямую  $B^V C^V$  в системе  $X_2 \frac{\pi_4}{\pi_5}$ . Одновременно в этих же системах плоскостей проекции отмечалось положение точки  $A$  (проекция  $A^IV$  в системе  $X_1 \frac{\pi_1}{\pi_4}$  и  $A^V$  в системе  $X_2 \frac{\pi_4}{\pi_5}$ ). Построенный отрезок  $A^V K^V$  представляет собой истинную длину перпендикуляра, опущенного из точки  $A$  на прямую  $BC$  ( $A^V K^V \equiv A^*K^*$ ) поскольку прямая  $AK$  занимает положение, параллельное плоскости  $\pi_5$ , т.е. является горизонтальной прямой в системе  $X_2 \frac{\pi_4}{\pi_5}$ .

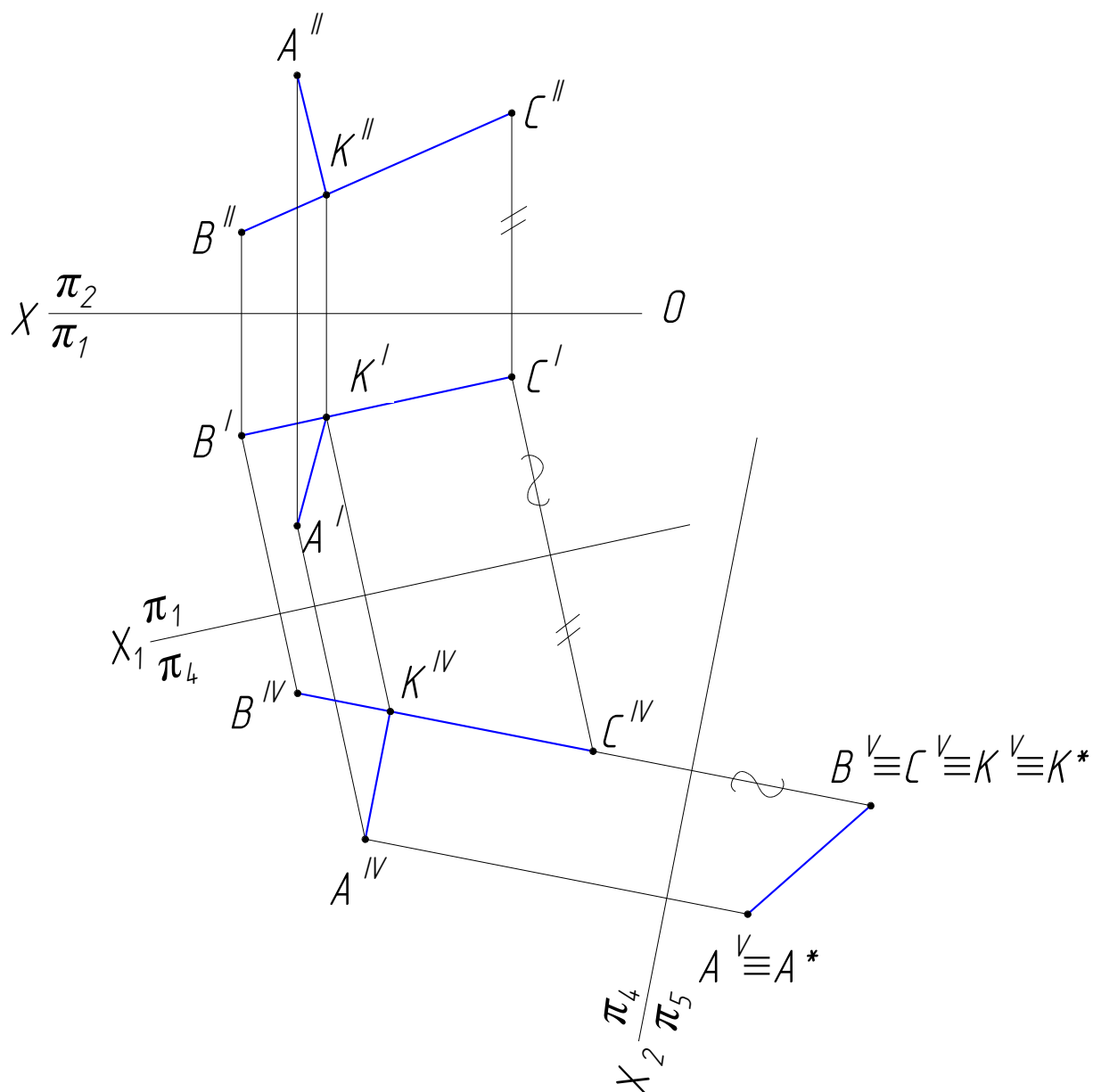


Рисунок 3.15 – Определение кратчайшего расстояния от точки до прямой общего положения

Поскольку отрезок  $A^V K^V$  является горизонтальной проекцией горизонтали, то фронтальная проекция горизонтали  $A^{IV} K^{IV}$  пройдет параллельно оси  $X_2$  ( $A^{IV} K^{IV} \parallel X_2$ ) или, что тоже самое  $A^{IV} K^{IV} \perp B^{IV} C^{IV}$ . Соблюдая проекционные связи относительно осей  $X_1$  и  $X_2$ , нетрудно получить соответствующие проекции кратчайшего расстояния  $A' K'$  и  $A'' K''$  в исходной системе  $X \frac{\pi_2}{\pi_1}$ .

### 3.3.3 Расстояние между двумя параллельными прямыми

Расстояние между двумя параллельными прямыми измеряется длиной перпендикуляра, опущенного из произвольной точки одной прямой на другую прямую. Фактически решение такой задачи сводится к определению расстояния от точки до прямой, рассмотренному в предыдущем разделе 3.3.2.

В связи с этим, не вдаваясь в описание последовательности действий, представим лишь графическое решение задачи по определению кратчайшего расстояния

$KL(K'L', K''L'')$  между параллельными прямыми  $AB(A'B', A''B'')$  и  $CD(C'D', C''D'')$ . Следует отметить, что в данном случае обе прямые методом перемены плоскостей проекции приводят в проецирующее положение (рисунок 3.16):

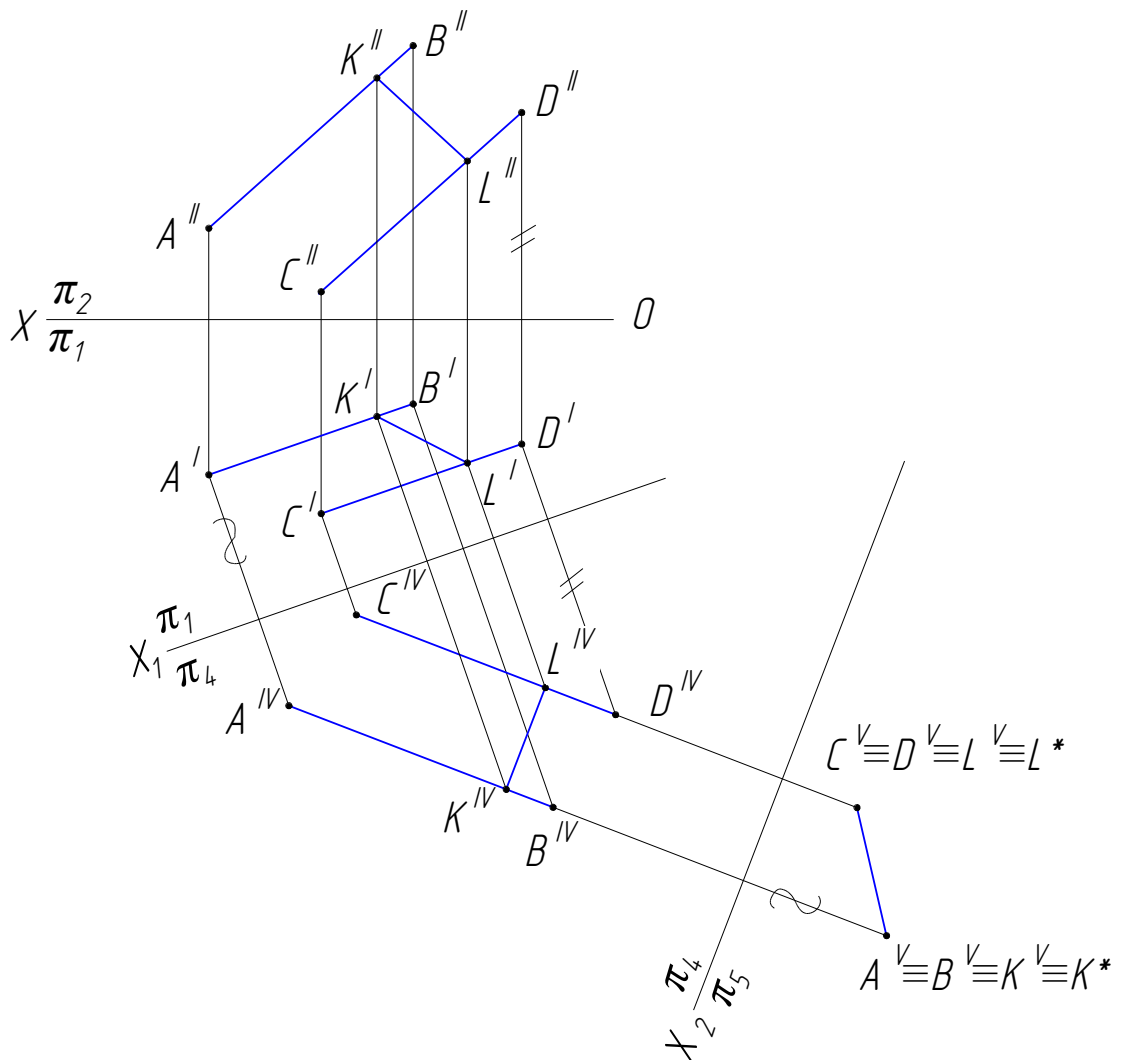


Рисунок 3.16 – Определение кратчайшего расстояния между параллельными прямыми

При решении задачи проекция  $K^{IV}L^{IV}$  проводилась параллельно оси  $X_2$  из точки, произвольно взятой на  $A^{IV}B^{IV}$ . При соблюдении проекционных связей относительно осей  $X_1$  и  $X$  получены проекции кратчайшего расстояния  $K'L'$  и  $K''L''$  соответственно.

### 3.3.4 Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми

Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми определяется длиной отрезка  $KL$  (рисунок 3.17), перпендикулярного обеим прямым  $a$  и  $b$  ( $KL \perp a, KL \perp b$ ).

Если одна из прямых перпендикулярна плоскости проекций ( $b \perp \pi_1$ ), то перпендикуляр к ней будет параллелен этой плоскости ( $KL \parallel \pi_1$ ) и спроецируется на нее без искажения ( $K'L' \equiv K^*L^*$ ).

Кроме того, прямой угол между  $KL$  и прямой  $a$  также спроецируется на плоскость  $\pi_1$  без искажения.

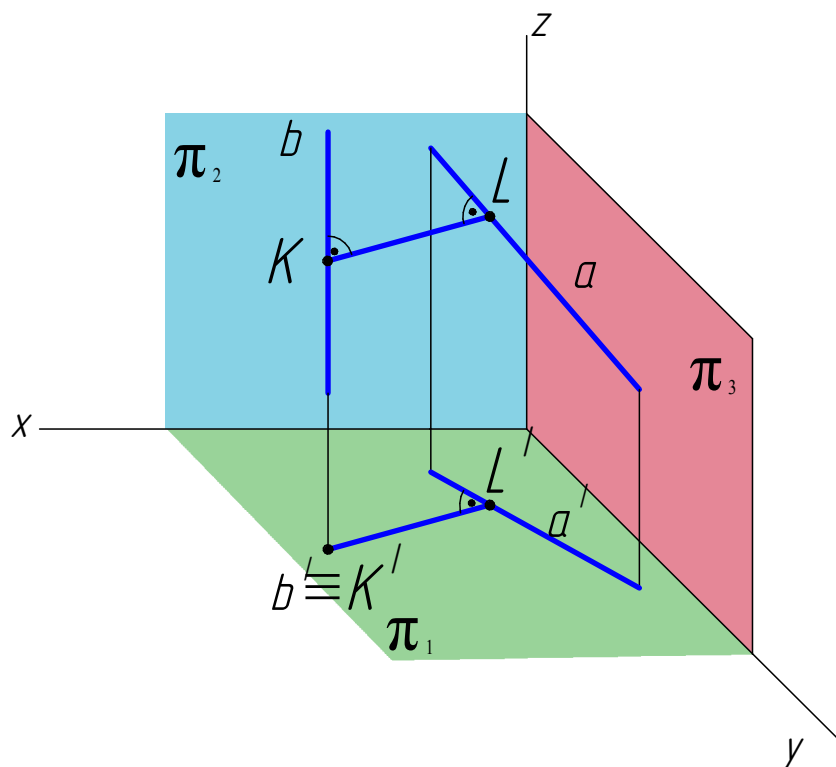


Рисунок 3.17 – Аксонометрическое изображение кратчайшего расстояния между скрещивающимися прямыми

Если обе скрещивающиеся прямые являются прямыми общего положения, необходимо последовательной переменой плоскостей проекций преобразовать чертеж так, чтобы одна из прямых стала проецирующей.

На рисунке 3.18 представлено решение задачи по определению кратчайшего расстояния между скрещивающимися прямыми  $AB(A'B', A''B'')$  и  $CD(C'D', C''D'')$ . В соответствии с алгоритмом, подробно рассмотренным в разделе 3.3.2, прямая  $CD$  приведена в проецирующее положение. В этих же системах плоскостей проекций  $X_1 \frac{\pi_1}{\pi_4}$  и  $X_2 \frac{\pi_4}{\pi_5}$  представлены и проекции прямой  $AB - A^{IV}B^{IV}$  и  $A^VB^V$  соответственно.



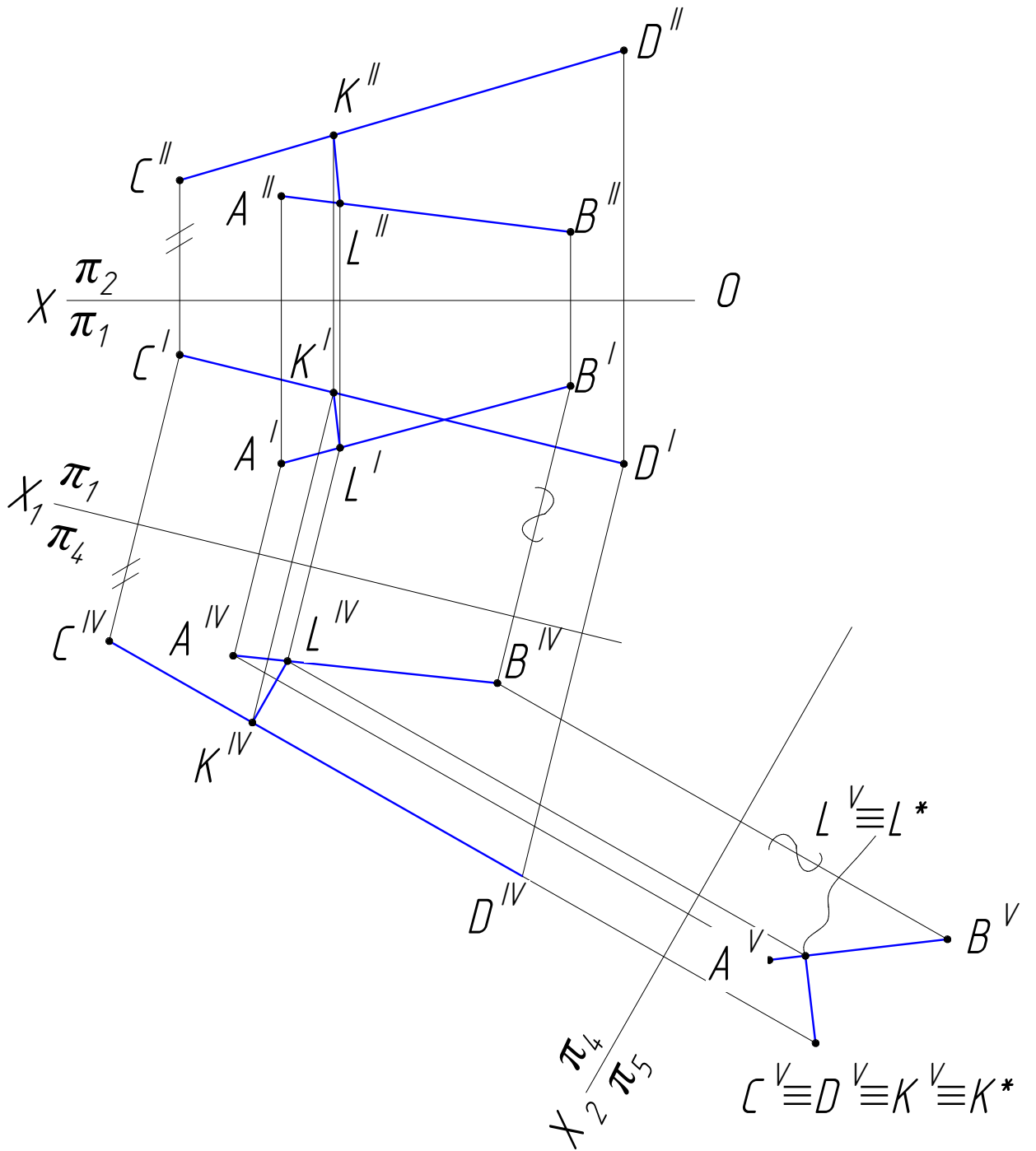


Рисунок 3.18 – Определение кратчайшего расстояния между скрещивающимися прямыми

Построенный отрезок  $K^V L^V$  является горизонтальной проекцией отрезка  $KL$ , перпендикулярного прямым  $CD$  и  $AB$  ( $KL \perp CD, KL \perp AB$ ). Поскольку отрезок  $KL$  параллелен плоскости проекций  $\pi_5$ , то он проецируется на нее без искажения. Следовательно,  $K^V L^V \equiv K^* L^*$  является истинной величиной кратчайшего расстояния между заданными скрещивающимися прямыми.

### 3.3.5 Расстояние от точки до плоскости

Расстоянием от точки до плоскости является длина перпендикуляра, опущенного из точки на данную плоскость.

В разделе 6.2 части 1 данного учебного пособия отмечалось, что если прямая перпендикулярна плоскости, то проекции прямой перпендикулярны одноименным следам этой плоскости.

В случае, если заданная плоскость является плоскостью частного положения (на рисунке 3.19 плоскость  $\alpha(h'_{0\alpha}, f''_{0\alpha})$  – фронтально-проецирующая), кратчайшее расстояние сразу определяется длиной перпендикуляра  $A''K''$ , опущенного из точки  $A''$  на проецирующий след  $f''_{0\alpha}$ . Это вытекает из того, что отрезок  $AK$  параллелен фронтальной плоскости  $\pi_2 (AK \parallel \pi_2)$ . Следовательно, его горизонтальная проекция параллельна оси  $OX (A'K' \parallel OX)$ , а фронтальная проекция является истинной длиной, т.е.  $A''K'' \equiv A^*K^*$ .

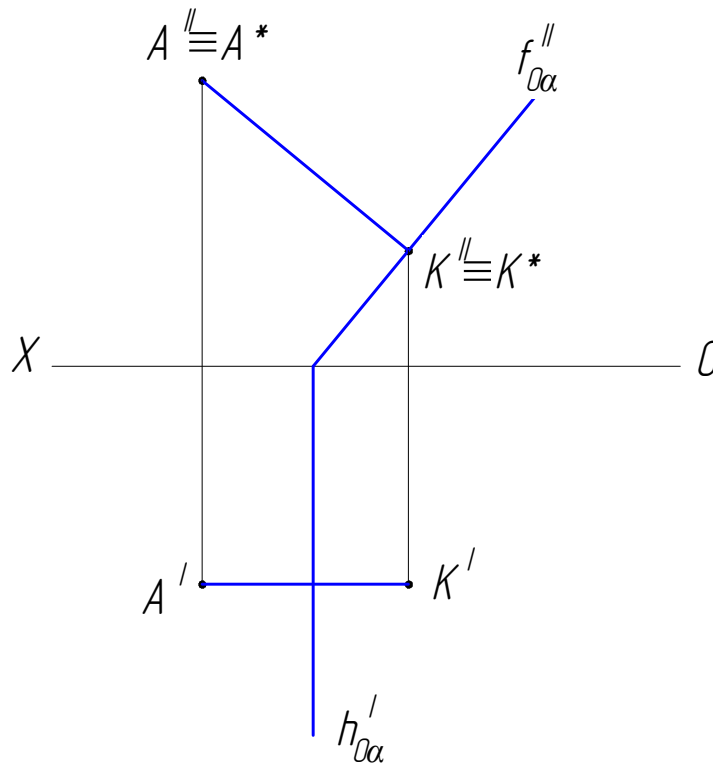


Рисунок 3.19 – Кратчайшее расстояние от точки до фронтально-проецирующей плоскости

Если же заданная плоскость является плоскостью общего положения, то для решения задачи необходимо эту плоскость преобразовать в положение в положение проецирующей плоскости.

На рисунке 3.20 представлено решение задачи по определению кратчайшего расстояния от точки  $A(A', A'')$  до плоскости общего положения  $\alpha(h'_{0\alpha}, f''_{0\alpha})$ . С этой целью, путем замены плоскости  $\pi_2$  на новую фронтальную плоскость проекции  $\pi_4$ , плоскость  $\alpha$  преобразована во фронтально-проецирующую в системе  $X_1 \frac{\pi_1}{\pi_4}$ . Ось  $X_1$  проведена перпендикулярно горизонтальному следу плоскости  $\alpha(X_1 \perp h'_{0\alpha})$  (см.раздел 3.2):

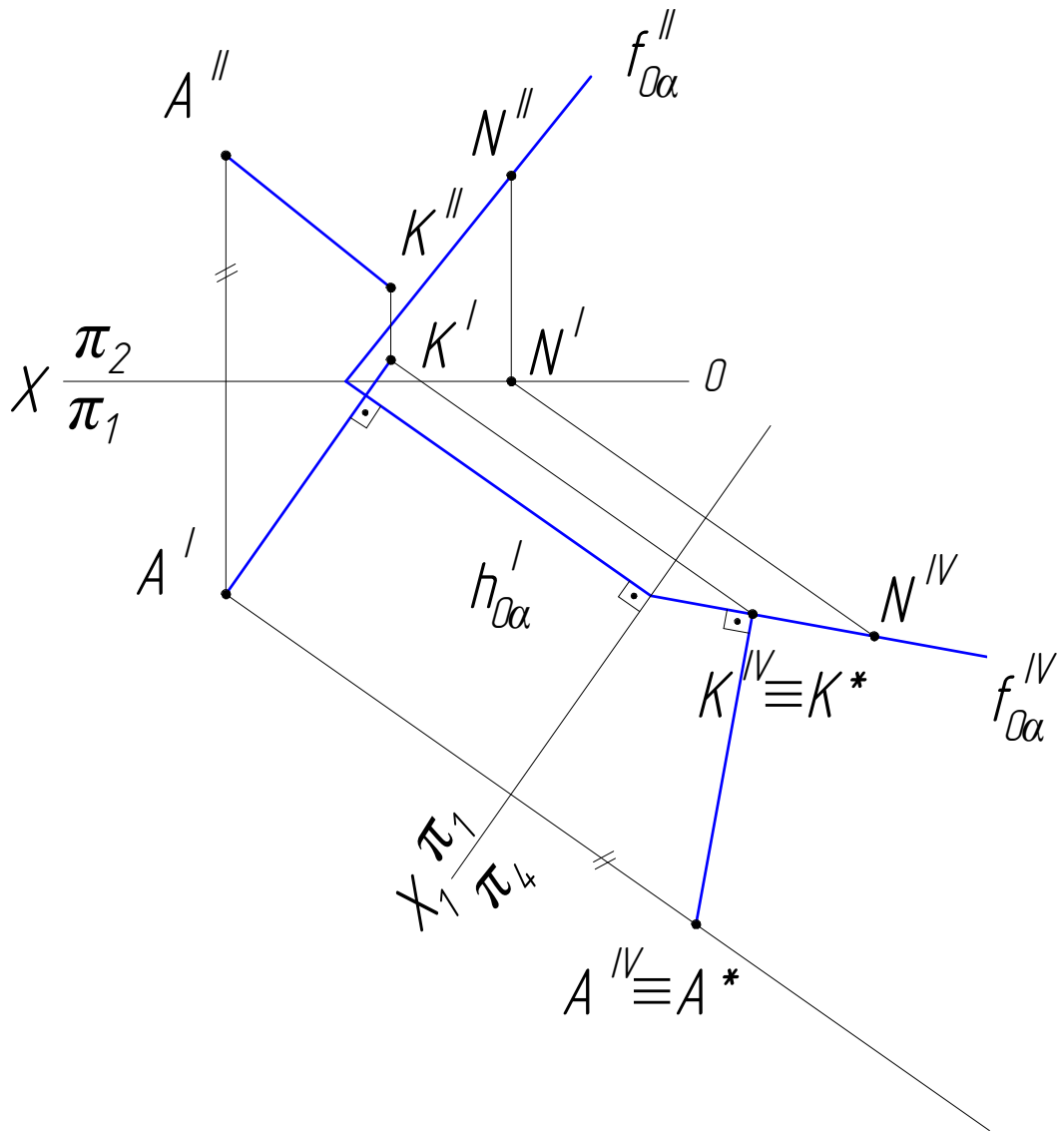


Рисунок 3.20 – Определение кратчайшего расстояния от точки до плоскости общего положения

В этой же системе  $X_1 \frac{\pi_1}{\pi_4}$ , с учетом неизменности координаты  $Z_A$ , получена новая фронтальная проекция  $A^{IV}$ . Отрезок  $A^{IV}K^{IV} \perp f_{0\alpha}''$  является истинной кратчайшего расстояния  $A^*K^*$  от точки  $A$  до плоскости  $\alpha$ . С учетом соблюдения проекционных связей в системах  $X_1 \frac{\pi_1}{\pi_4}$  и  $X \frac{\pi_2}{\pi_1}$  получены проекции этого расстояния  $A'K'$  и  $A''K''$  соответственно.

### 3.3.6 Расстояние от прямой до параллельной ей плоскости

Расстояние от прямой до параллельной ей плоскости определяется длиной перпендикуляра, опущенного из произвольной точки этой прямой на заданную плоскость.

Решение задачи по определению истинной длины перпендикуляра сводится к случаю, рассмотренному в предыдущем разделе 3.3.5, если заданную плоскость привести в проецирующее положение относительно вновь введенной плоскости проекций.

На рисунке 3.21 представлена прямая  $AB(A'B', A''B'')$  и параллельна ей плоскость  $\alpha(h'_{0\alpha}, f''_{0\alpha})$ . Их параллельность подтверждается тем, что  $AB \parallel MN \in \alpha(A'B' \parallel M'N', A''B'' \parallel M''N'')$

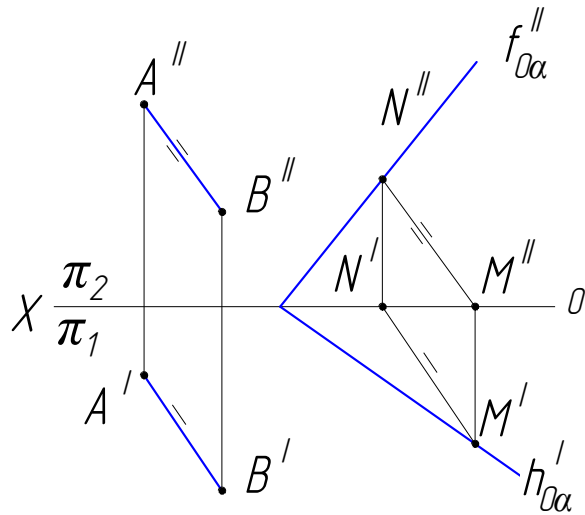


Рисунок 3.21 – Эпюр прямой, параллельной заданной плоскости.

В соответствии с методикой, изложенной в разделе 3.2, преобразуем плоскость  $\alpha$  во фронтально-проецирующую, проведя ось  $X_1 \perp h'_{0\alpha}$  и построив в системе  $X_1 \frac{\pi_1}{\pi_4}$  новый фронтальный след  $f''_{0\alpha}$  (рисунок 3.22). В этой же системе  $X_1 \frac{\pi_1}{\pi_4}$  представим новую фронтальную проекцию прямой  $A^{IV}B^{IV}$ . Построение проекции  $A^{IV}B^{IV}$  проводится с учетом неизменности координат  $Z_A$  и  $Z_B$  концов отрезка при перемене плоскостей проекций.

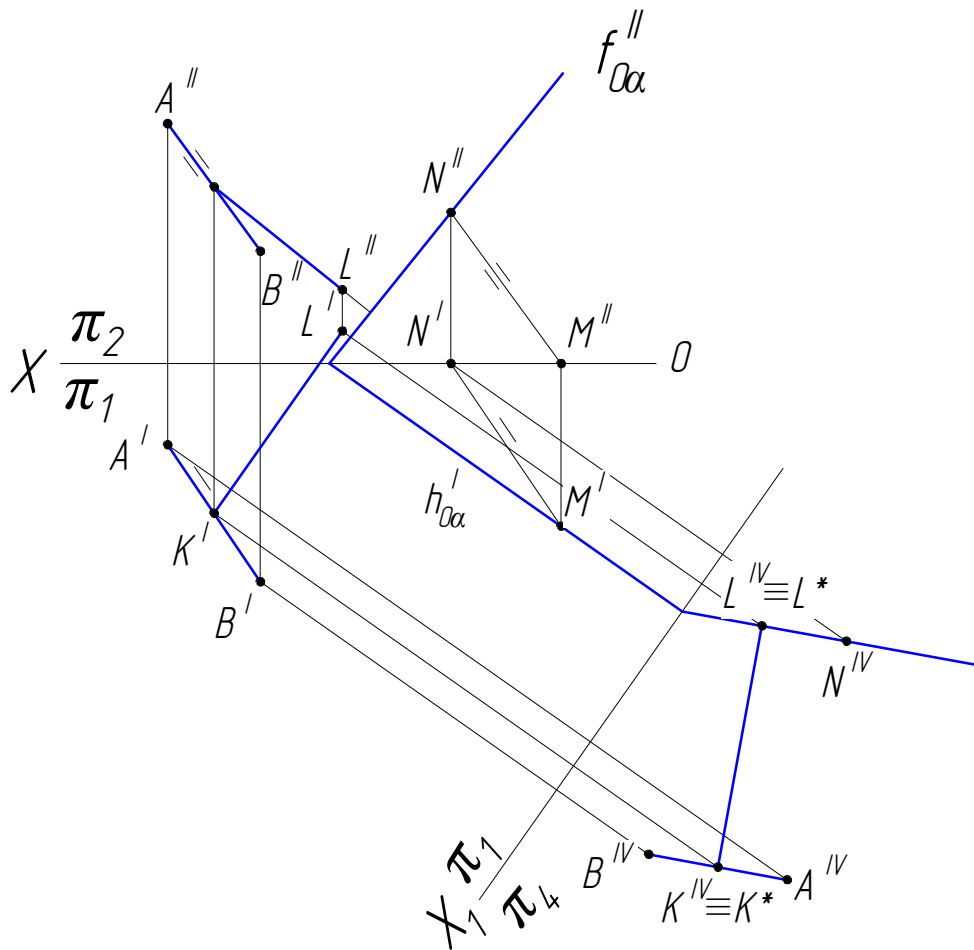


Рисунок 3.22 – Определение кратчайшего расстояния от прямой до параллельной ей плоскости

В проекции на плоскость  $\pi_4$  отрезок  $A^{IV}B^{IV}$  и новый фронтальный след  $f_{0\alpha}^{IV}$ , параллельны друг другу ( $A^{IV}B^{IV} \parallel f_{0\alpha}^{IV}$ ). При этом перпендикуляр  $K^{IV}L^{IV}$ , опущенный из произвольной точки  $K^{IV} \in A^{IV}B^{IV}$  на след  $f_{0\alpha}^{IV}$ , проецируется на плоскость  $\pi_4$  без искажения, т.е. в истинную величину  $K^*L^*$ .

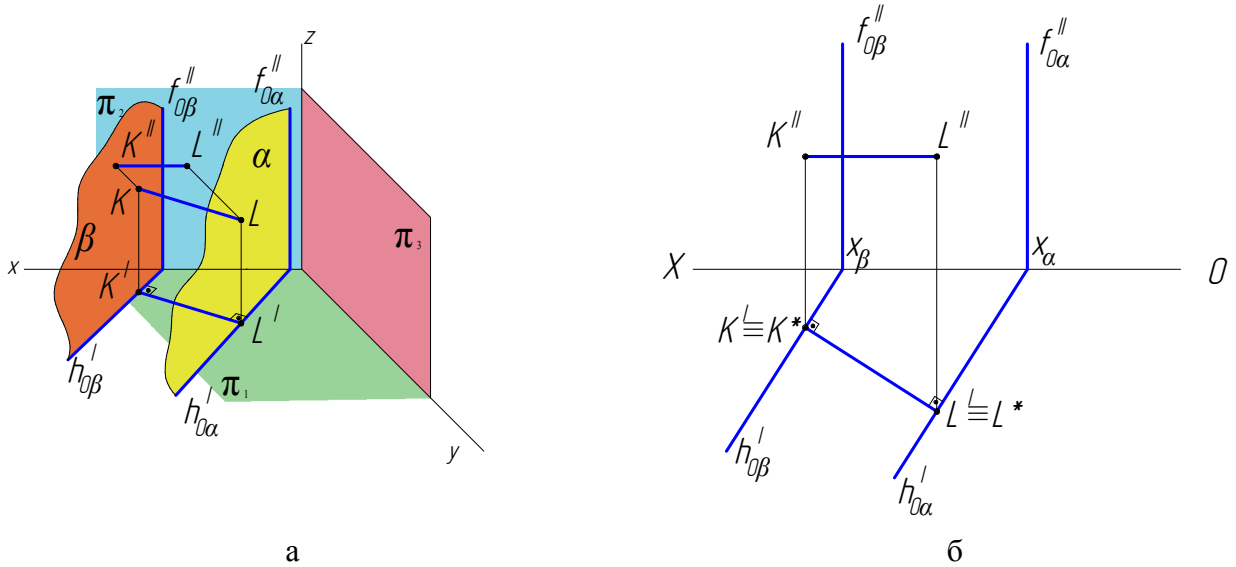
При соблюдении проекционных связей относительно осей  $X_1$  и  $X$  получены проекции кратчайшего расстояния  $K'L'$  и  $K''L''$  с учетом того, что  $K'L' \perp h'_{0\alpha}$  и  $K''L'' \perp f''_{0\alpha}$ .

### 3.3.7 Расстояние между двумя параллельными плоскостями

Расстояние между двумя параллельными плоскостями определяется длиной перпендикуляра, опущенного из произвольной точки одной плоскости на другую.

Если обе плоскости изначально занимали проецирующие положение относительно какой-либо плоскости проекций, то отрезок прямой, определяющий кратчайшее расстояние между параллельными плоскостями будет проецироваться на эту плоскость проекций без искажения перпендикулярно проецирующим следам.

На рисунке 3.23 представлены проекции кратчайшего расстояния между двумя горизонтально-проецирующими плоскостями  $\alpha(h'_{0\alpha}, f''_{0\alpha})$  и  $\beta(h'_{0\beta}, f''_{0\beta})$ :



а - в аксонометрических осях

б - на эпюре

Рисунок 3.23 – Кратчайшее расстояние между двумя горизонтально проецирующими плоскостями

Если изначально параллельные плоскости занимали общее положение, то для определения расстояния между ними целесообразно методом перемены плоскостей проекции перевести заданные плоскости в частное положение.

На рисунке 3.24 показано определение кратчайшего расстояния между двумя параллельными плоскостями общего положения  $\alpha(h'_{0\alpha}, f''_{0\alpha})$  и  $\beta(h'_{0\beta}, f''_{0\beta})$ .

Проведя ось  $X_1$  перпендикулярно горизонтальным следам  $h'_{0\alpha}$  и  $h'_{0\beta}$ , плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  преобразовываем в системе  $X_1 \frac{\pi_1}{\pi_4}$  во фронтально-проецирующие. Затем из произвольной точки  $K^{IV}$  на следе  $f_{0\alpha}^{IV}$  опускаем перпендикуляр  $K^{IV}L^{IV}$  на след  $f_{0\beta}^{IV}$ . Длина этого перпендикуляра и определяет кратчайшее расстояние между параллельными

плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ . На плоскость  $\pi_4$  отрезок  $K^{IV}L^{IV}$  проецируется без искажения, т.е.  $K^4L^4 \equiv K^*L^*$ .

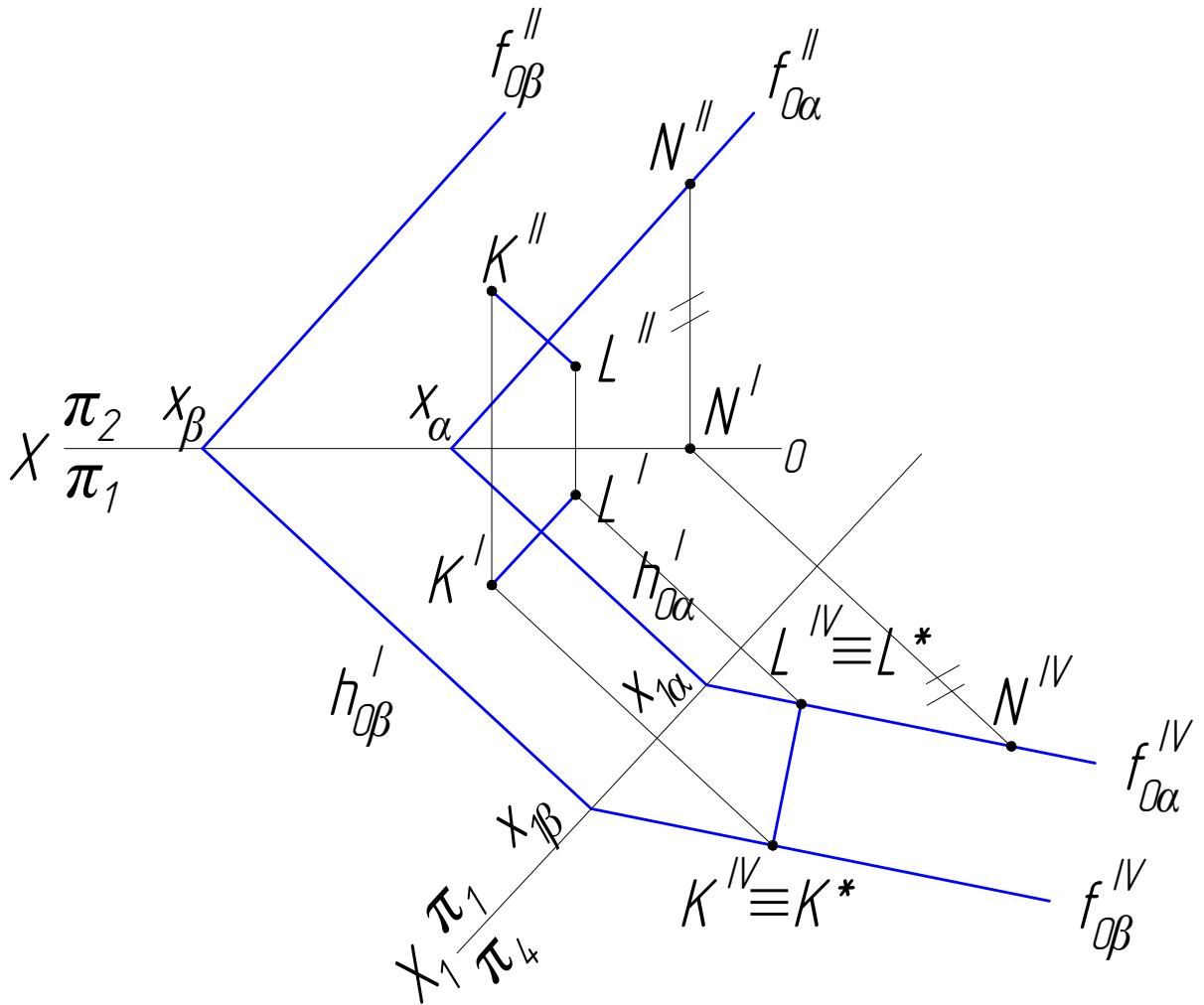


Рисунок 3.24 – Определение кратчайшего расстояния между параллельными плоскостями общего положения

Поскольку кратчайшее расстояние между плоскостями можно определять, опуская перпендикуляр из любой точки одной плоскости на другую, то горизонтальная проекция  $K'L'$  построена на произвольном расстоянии от оси  $X_1$  параллельно ей из точки  $K'$ , находящейся в проекционной связи с точкой  $K^{IV}$  в системе  $X_1 \frac{\pi_1}{\pi_4}$ .

Фронтальная проекция кратчайшего расстояния  $K''L''$  построена в проекционной связи с  $K'L'$  в системе  $X \frac{\pi_2}{\pi_1}$  с учетом неизменности координат  $Z_K$  и  $Z_L$  концов отрезка  $K^{IV}L^{IV}$ , измеренных на плоскости  $\pi_4$ .

В случае, если плоскость общего положения задана не следами, а проекциями плоской фигуры, то для приведения ее в частное положение методом перемены плоскостей проекции при решении метрических задач, в заданной плоскости следует провести горизонталь или фронталь, соответствующие проекции которых определяют направление следов этой плоскости, а значит и положение новых координатных осей (см. раздел 3.2.2).

## 4 Определение истинных величин линейных углов

При решении задач по определению истинных величин линейных углов рассматривать будем три основных случая:

- 1 Определение угла между двумя прямыми
- 2 Определение угла между прямой и плоскостью
- 3 Определение угла между двумя плоскостями

### 4.1 Определение угла между двумя прямыми

Как известно, прямые в пространстве могут пересекаться или скрещиваться.

Угол между двумя скрещивающимися прямыми измеряется линейным углом между двумя пересекающимися прямыми, параллельным этим скрещивающимся прямым. Поэтому будем рассматривать лишь определение величины плоского угла, образованного двумя пересекающимися прямыми.

На плоскость проекций угол будет проецироваться без искажения, если обе стороны плоского угла параллельны плоскости проекций. Если хотя бы одна сторона плоского угла (острого, прямого или тупого) параллельна плоскости проекций, а другая не перпендикулярна ей, то проекцией угла на эту плоскость будет угол того же вида (острый, прямой или тупой). Если обе стороны плоского угла не параллельны плоскости проекций, то на эту плоскость заданный угол проецируется с искажением.

Следовательно, для решения задачи по определению истинной величины плоского угла необходимо любым из способов преобразования ортогональных проекций, плоскость, которой принадлежит угол, расположить параллельно плоскости проекций.

Рассмотрим пример определения величины плоского угла.

Пример 4.1 Определить истинную величину плоского угла  $ABC(A'B'C', A''B''C'')$  (рисунок 4.1):

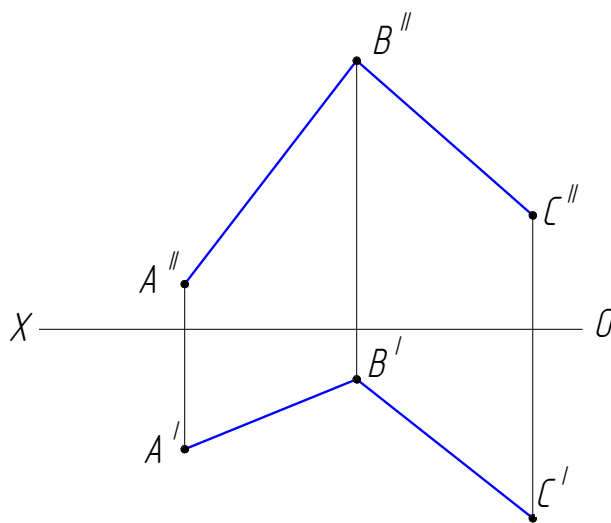


Рисунок 4.1 – Условие к примеру 4.1

Представим решение задачи методом вращения вокруг линии уровня. В качестве оси вращения примем горизонталь  $h(h', h'')$ , проведенную через точку  $C(C', C'')$  и принадлежащую плоскости угла  $ABC(A'B'C', A''B''C'')$ . Вращение будем осуществлять до тех пор, пока угол  $1BC$  не займет положение, параллельное плоскости проекций  $\pi_1$  (см. раздел 2.2):

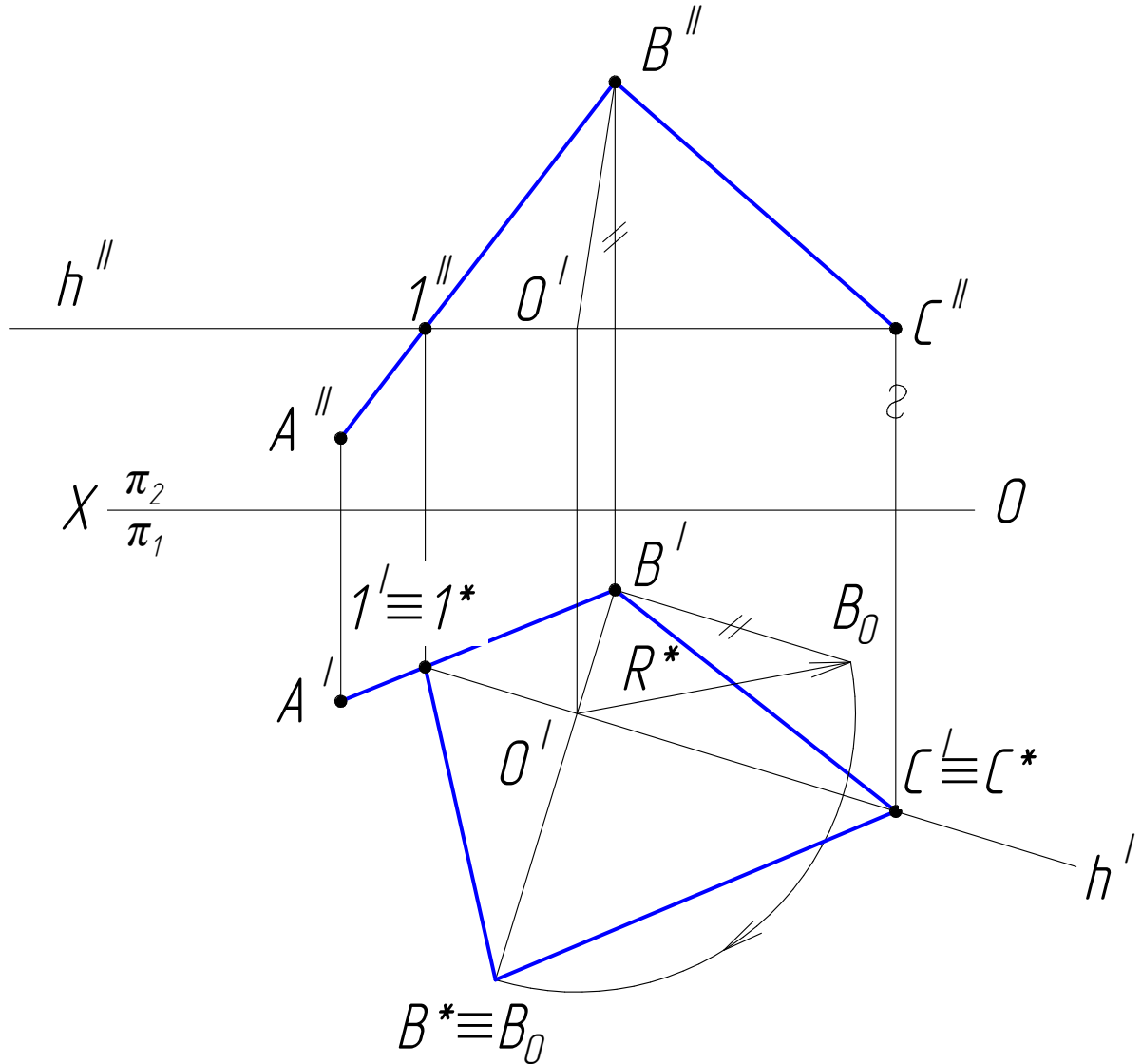


Рисунок 4.2 – Определение истинной величины угла между прямыми методом вращения

Точки 1 и  $C$  расположены на оси вращения, поэтому при вращении своего положения не изменяют ( $1' \equiv 1^*$ ,  $C' \equiv C^*$ ).

Точка  $B$  перемещается в пространстве по дуге окружности, плоскость которой перпендикулярна оси вращения ( $O'B' \perp h'$ ). Истинная величина радиуса  $R^* = O'B_0$  определена методом построения прямоугольного треугольника  $O'B'B_0$ . Переноса значение этого радиуса на горизонтальную проекцию траектории перемещения точки  $B$ , получим угол  $1^*B^*C^*$ , равный истинной величине плоского угла между пересекающимися прямыми  $AB$  и  $BC$ .



Эту же задачу можно решить и методом перемены плоскостей (рисунок 4.3):

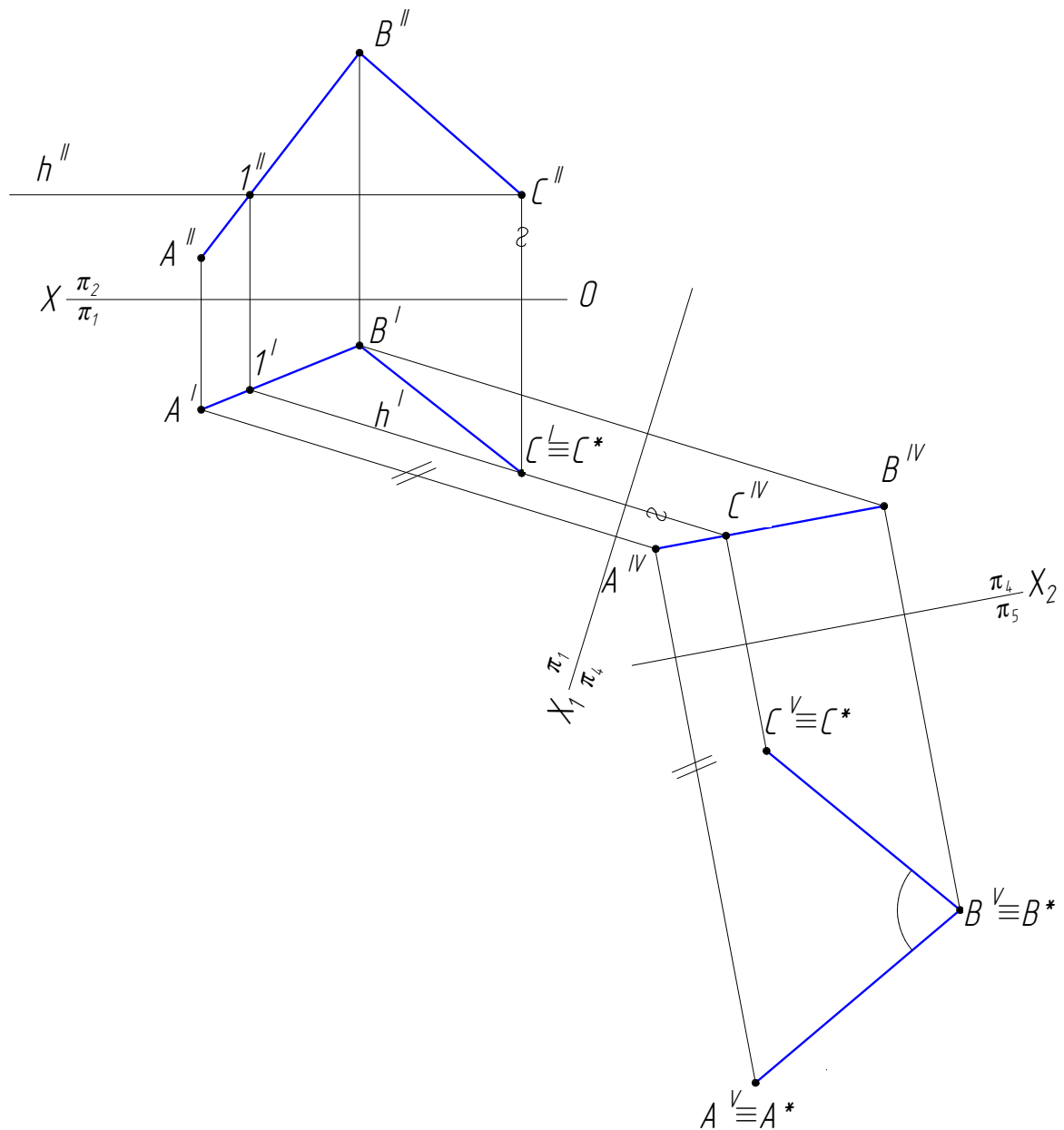


Рисунок 4.3 – Определение истинной величины угла между прямыми методом перемены плоскостей проекций

Задача решается двойной последовательной переменой плоскостей проекции. При первой перемене плоскость угла  $ABC$  преобразуют в проецирующую. С этой целью новую фронтальную плоскость проекций  $\pi_4$  располагают перпендикулярно горизонтали  $h(h', h'')$ , построенной в плоскости угла  $ABC$  ( $\pi_4 \perp h$ ). Проведя ось  $X_1 \perp h'$ , с учетом неизменности координаты  $Z$ , точек  $A, B, C$ , получим в системе  $X_1 \frac{\pi_1}{\pi_4}$  новую фронтальную проекцию угла в виде отрезка линии  $A^{IV} B^{IV}$ . Второй переменной новую горизонтальную плоскость  $\pi_5$  расположим параллельно плоскости угла  $ABC$ . Для этого проведем ось  $X_2 \parallel A^{IV} B^{IV}$ . В этом случае в системе  $X_2 \frac{\pi_4}{\pi_5}$  с учетом неизменности координаты  $Y$  точек

$A, B$  и  $C$ , измеренных на плоскости  $\pi_1$  в системе  $X_1 \frac{\pi_1}{\pi_4}$ , получим новую горизонтальную проекцию угла  $A^V B^V C^V$ , равную его истинной величине ( $A^V B^V C^V \equiv A^* B^* C^*$ ).

## 4.2 Определение угла между прямой и плоскостью

Углом  $\varphi$  между прямой и плоскостью называется угол между этой прямой и ее ортогональной проекцией на эту плоскость (рисунок 4.4):

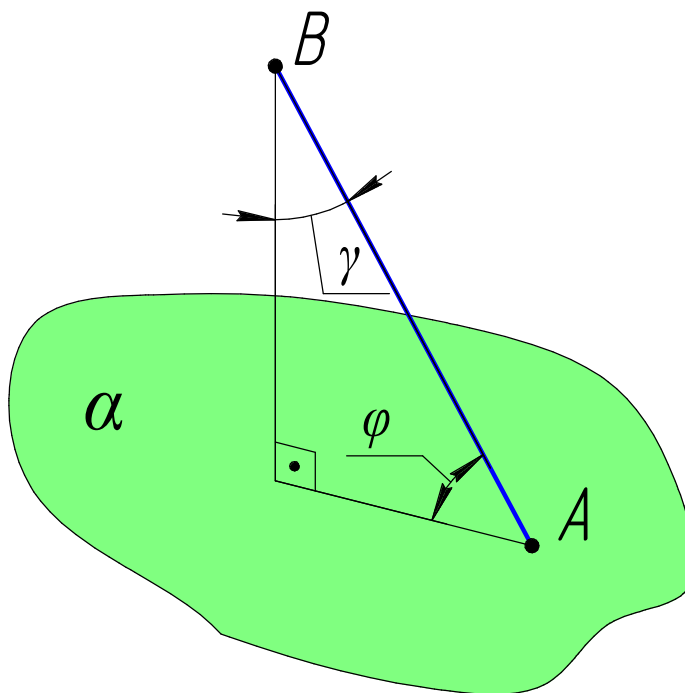


Рисунок 4.4 – Угол между прямой и плоскостью

На практике значительно проще определять не угол  $\varphi$  между прямой и плоскостью, а угол  $\gamma$  между прямой и перпендикуляром, опущенным из произвольной точки  $B$  этой прямой на заданную плоскость. Тогда, с учетом суммы углов в прямоугольном треугольнике, искомый угол  $\varphi = 90 - \gamma$ .

В этом случае алгоритм определения угла между прямой и плоскостью выглядит следующим образом:

- из произвольной точки на прямой опустить перпендикуляр на заданную плоскость;
- определить угол  $\gamma$  между пересекающимися прямыми заданной прямой и перпендикуляром к плоскости;
- определить искомый угол  $\varphi$  между заданной прямой и плоскостью как разность вида  $\varphi = 90 - \gamma$ .

Рассмотрим применение данного алгоритма на примере.

Пример 4.2 Определить угол  $\varphi$  между прямой  $AB(A'B', A''B'')$  и плоскостью  $\alpha(h'_{0\alpha}, f''_{0\alpha})$  (рисунок 4.5):

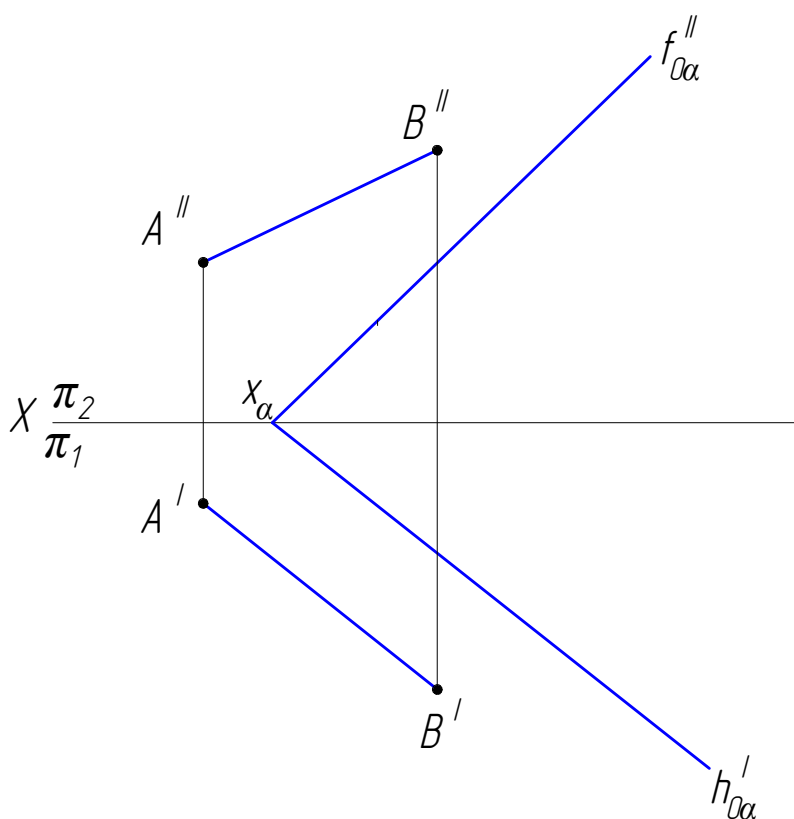


Рисунок 4.5 – Задание к примеру по определению угла между прямой и плоскостью  $\alpha$

В соответствии с описанным алгоритмом опустим из точки  $B(B', B'')$  прямой  $AB$  перпендикуляр на плоскость  $\alpha$  (рисунок 4.6) т.е. строим  $B'K' \perp h'_{0\alpha}$  и  $B''K'' \perp f''_{0\alpha}$  (точка  $K(K', K'')$  на перпендикуляре взята произвольно).

Угол  $ABK$  является углом  $\gamma$  между прямой  $AB$  и перпендикуляром  $BK$  к плоскости  $\alpha$ . Его величину определим методом перемены плоскостей проекции (либо любым другим способом). С этой целью в плоскости угла  $ABK$  проведем горизонталь  $A1(A'1', A''1'')$ .

Первой переменной, проведя  $X_1 \perp A'1'$  преобразуем плоскость угла  $ABK$  в проецирующую в системе  $X_1 \frac{\pi_1}{\pi_4}$ . В результате на плоскости  $\pi_4$  проекция угла выглядит в виде отрезка  $B^{IV}K^{IV}$ .

Второй переменной расположим плоскость проекций  $\pi_5$  параллельно плоскости угла  $ABK$ . С этой целью новую ось  $X_2$  проведем параллельно отрезку  $B^{IV}K^{IV}$  ( $X_2 \parallel B^{IV}K^{IV}$ ). В системе  $X_2 \frac{\pi_4}{\pi_5}$  угол  $\gamma \equiv ABK$  будет проецироваться на плоскость  $\pi_5$  в истинную величину ( $\angle A^V B^V K^V \equiv \angle A^* B^* K^*$ ).

Искомый угол  $\varphi$  является добавочным к углу  $\gamma \equiv A^* B^* K^*$  до  $90^\circ$ ,  $\varphi = 90^\circ - \gamma$ .

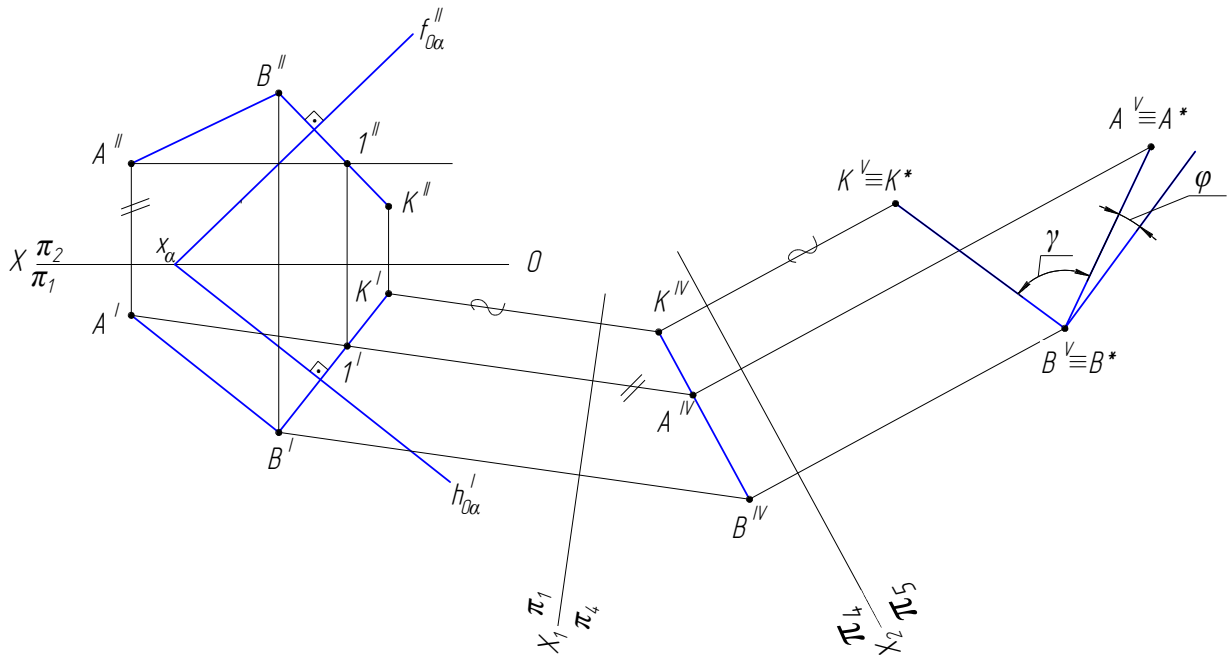


Рисунок 4.6 – Определение угла между прямой и плоскостью, заданной следами

Если плоскость задана плоской фигурой, например, треугольником, то для нахождения угла между прямой  $MN(M'N', M''N'')$  и плоскостью треугольника  $ABC(A'B'C', A''B''C'')$  (рисунок 4.7) необходимо в плоскости треугольника построить фронталь  $f(f', f'')$  и горизонталь  $h(h', h'')$ , которые определяют направление следов этой плоскости (напомним,  $h'_{\Delta ABC} \parallel h'_{0\alpha}$ ,  $f''_{\Delta ABC} \parallel f''_{0\alpha}$ ).

В этом случае проекциями перпендикуляра, опущенного из точки  $M(M', M'')$  на плоскость треугольника будут  $M'K' \perp h'$  и  $M''K'' \perp f''$ .

Алгоритм поиска истинной величины плоского угла  $\gamma \equiv MNK$  между заданной прямой и перпендикуляром к плоскости и, соответственно, нахождение угла  $\varphi = 90 - \gamma$  между прямой и плоскостью остается аналогичным, описанному выше (на рисунке 4.7 – не рассматривается).

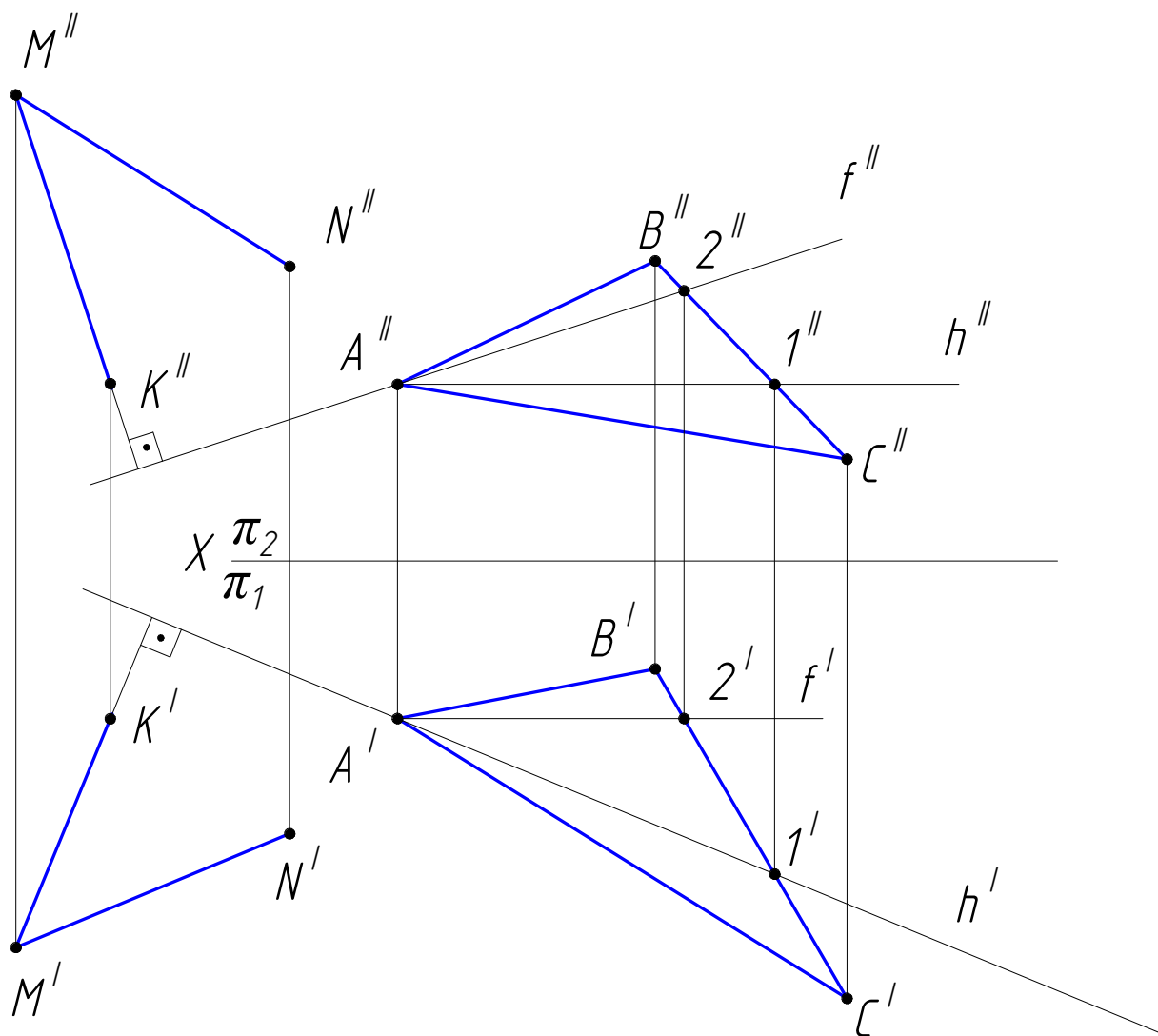


Рисунок 4.7 – Определение угла между прямой и плоскостью, заданной плоской фигурой

### 4.3 Определение угла между двумя плоскостями

Угол, образованный двумя пересекающимися плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$  (рисунок 4.8) называется двугранным. Его мерой служит плоский угол  $\varphi$ , полученный при пересечении двугранного угла плоскостью  $\delta$ , перпендикулярной ребру  $MN$  двугранного угла. На практике проще определять не плоский угол  $\varphi$ , а угол  $\gamma$ , образованный двумя перпендикулярами  $BC$  и  $BD$ , опущенными из произвольной точки пространства  $B$  на плоскость  $\alpha$  и  $\beta$ , являющиеся гранями плоского угла  $\varphi$ .

Нетрудно заметить, что между углами  $\varphi$  и  $\gamma$  справедливо соотношение вида  $\varphi = 180 - \gamma$  (рисунок 4.8).

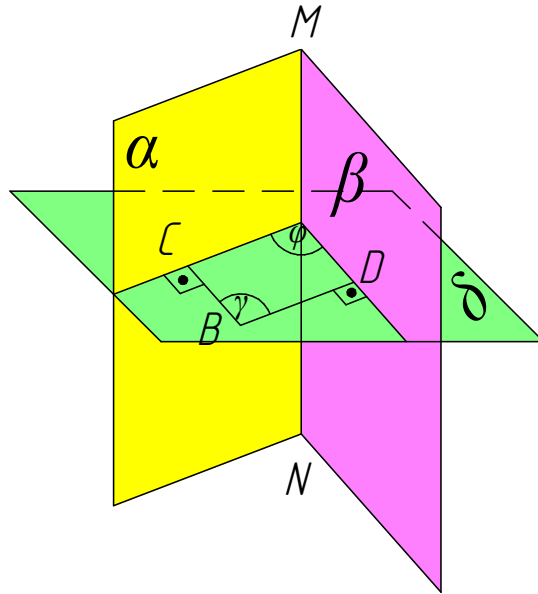


Рисунок 4.8 – Двугранный угол между плоскостями

Исходя из этого, алгоритм определения угла между пересекающимися плоскостями может быть представлен в виде:

- из произвольной точки пространства опустить перпендикуляры на заданные плоскости;
- определить полученный угол  $\gamma$  между этими перпендикулярами;
- определить искомый угол  $\varphi$  как разность вида  $\varphi = 180 - \gamma$

Поскольку мерой угла между плоскостями принято считать острый угол, то этим соотношением нужно пользоваться только тогда, когда дополнительный угол -тупой ( $\gamma > 90^\circ$ ) (рисунок 4.9а). Если же дополнительный угол -острый ( $\gamma < 90^\circ$ ), то он непосредственно равен искомому углу (рисунок 4.9б):

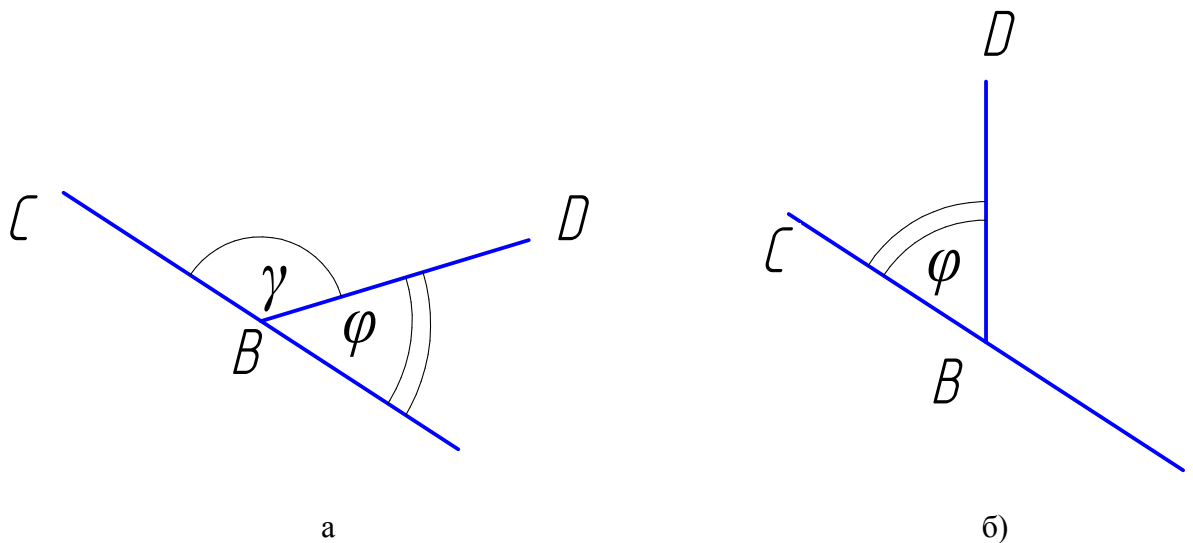


Рисунок 4.9 – Обозначение угла между плоскостями

Рассмотрим использование описанного алгоритма определения угла между плоскостями на примере.

Пример 4.3 Определить истинную величину угла между плоскостями  $\alpha(h'_{0\alpha}, f''_{0\alpha})$  и  $\beta(h'_{0\beta}, f''_{0\beta})$  (рисунок 4.10):

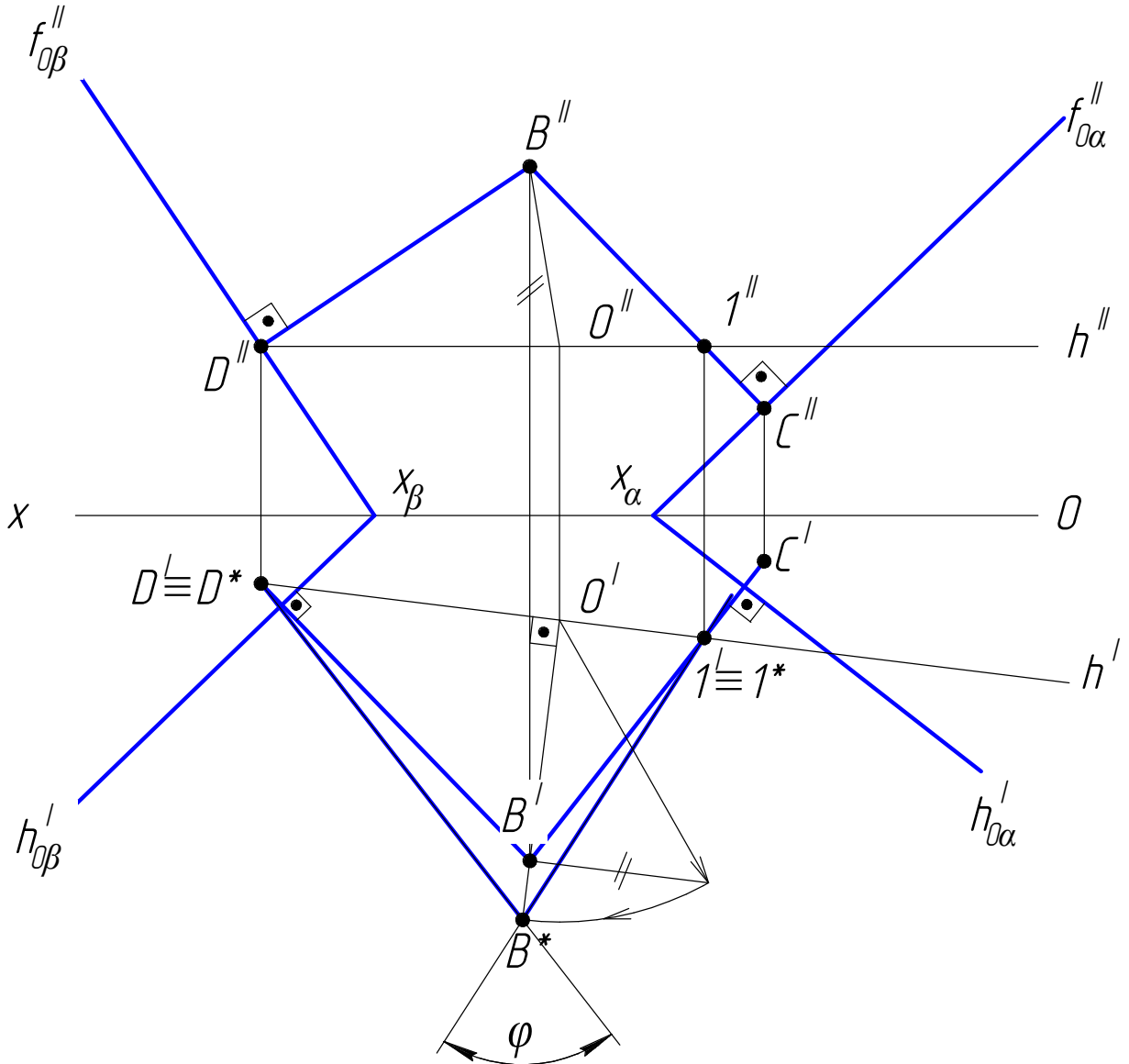


Рисунок 4.10 – Определение истинной величины угла между плоскостями

Решение задачи представим в виде следующей последовательности действий:

- 1 Из произвольной точки пространства  $B(B', B'')$  опускаем перпендикуляры на плоскости  $\alpha$  и  $\beta$ , т.е. строим  $B'C' \perp h'_{0\alpha}$ ,  $B''C'' \perp f''_{0\alpha}$  и  $B'D' \perp h'_{0\beta}$ ,  $B''D'' \perp f''_{0\beta}$ .
- 2 Для определения истинной величины  $\angle CBD$  ( $C'B'D'$ ,  $C''B''D''$ ) методом вращения проводим в плоскости этого угла горизонталь  $h(h'' \equiv 1''D'' \parallel OX, h' \equiv 1'D')$  (рисунок 2.2).

- 3 Строим  $B'O' \perp h'$ , т.к. вращение точки  $B$  проходит в плоскости, перпендикулярной горизонтали.
- 4 Методом прямоугольного треугольника определяем истинную величину радиуса вращения  $R^*$  точки  $B$  и переносим ее на продолжение перпендикуляра  $O'B'$ . Получаем точку  $B^*$ .
- 5 С учетом неизменности положения точек  $1(1', 1'')$  и  $D(D', D'')$ , находящихся на оси вращения, получаем истинную величину  $\angle 1^*B^*D^*$ . Поскольку в данной задаче  $\angle 1^*B^*D^* < 90^\circ$ , то принимаем его в качестве искомого угла  $\varphi$  между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ .

В случае, если гранями двугранного угла являются проецирующие плоскости, то угол между ними определяется плоским углом между проецирующими следами этих плоскостей.

На рисунке 4.11 изображены две горизонтально проецирующие плоскости  $\alpha(h'_{0\alpha}, f''_{0\alpha})$  и  $\beta(h'_{0\beta}, f''_{0\beta})$  и отмечен угол между ними, как угол  $\varphi$  между проецирующими следами  $h'_{0\alpha}$  и  $h'_{0\beta}$ .

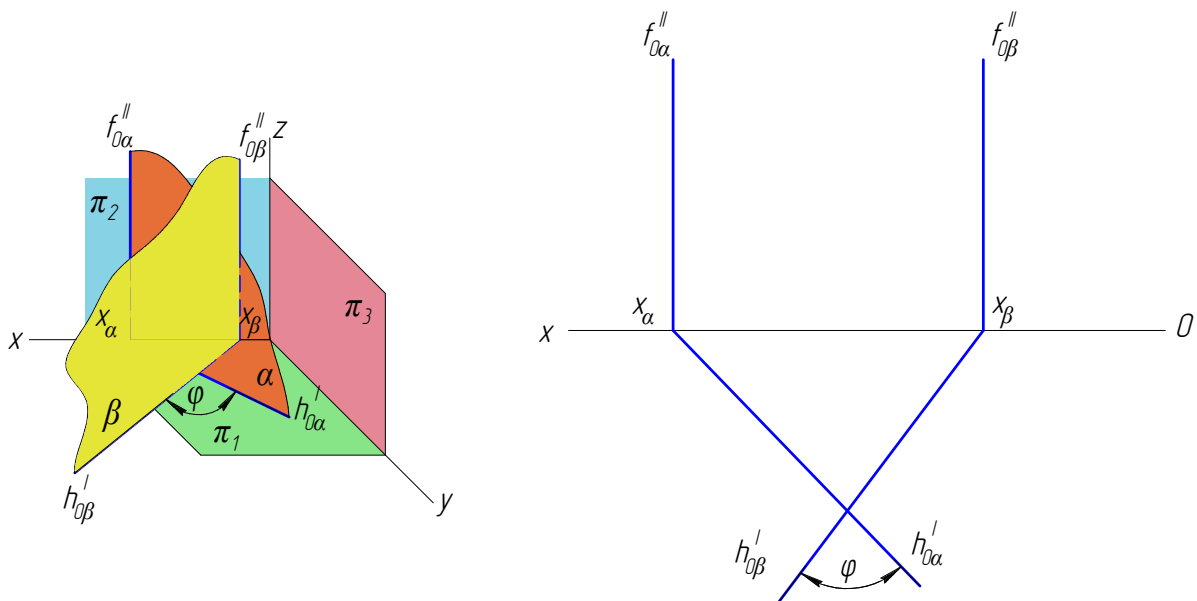


Рисунок 4.11 – Угол между горизонтально-проецирующими плоскостями

Это свойство проецирующих плоскостей целесообразно использовать для определения угла между плоскостями занимающими произвольное положение в пространстве. Для этого необходимо, используя методы перемены плоскостей проекции, преобразовать обе плоскости в проецирующие.

Рассмотрим это на примере определения истинной величины угла между двумя плоскостями общего положения методом ППП.

Пример 4.4 Определить истинную величину угла между плоскостями общего положения  $\alpha(h'_{0\alpha}, f''_{0\alpha})$  и  $\beta(h'_{0\beta}, f''_{0\beta})$  (рисунок 4.12):



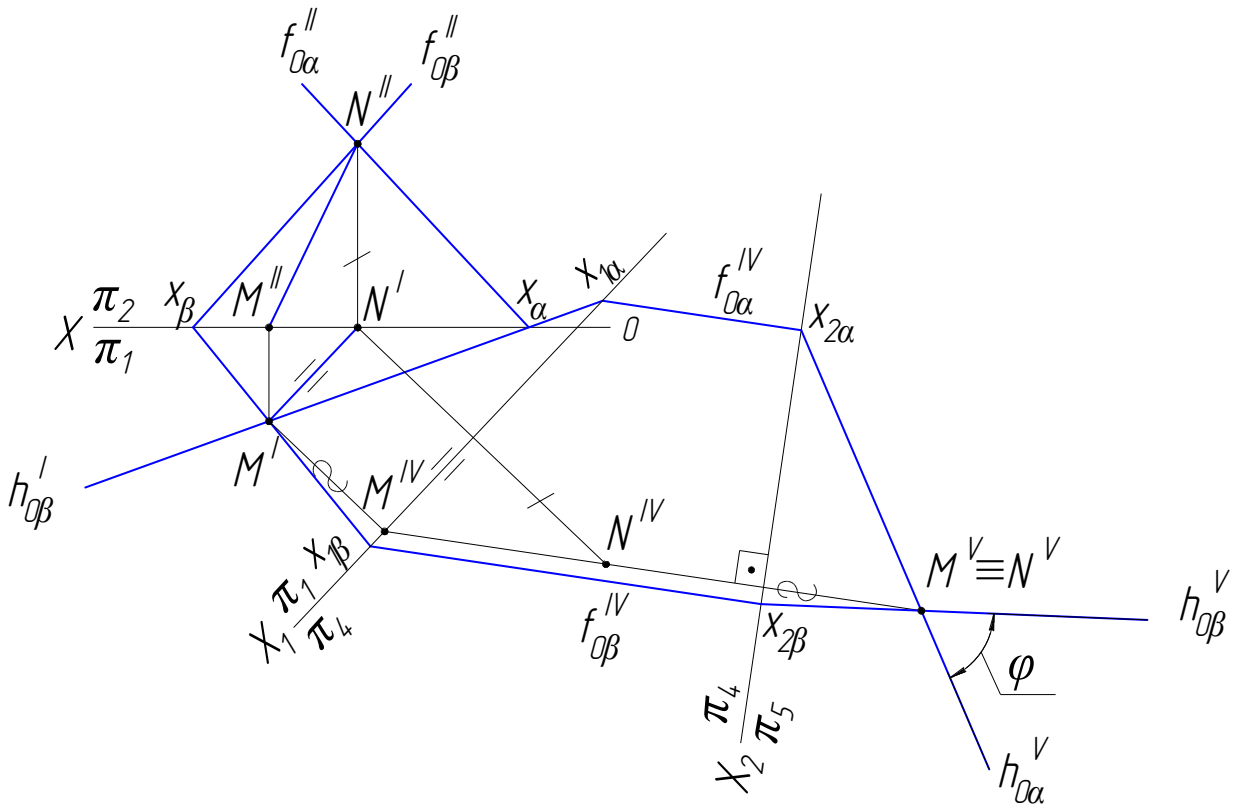


Рисунок 4.12 – Определение угла между плоскостями методом перемены плоскостей проекций

Последовательность действий при решении задачи выглядит следующим образом:

- 1 С учетом того, что линия пересечения плоскостей проходит через точки пересечения их одноименных следов, строим проекции этой линии  $M'N'$  и  $M''N''$ .
- 2 Вводим новую фронтальную плоскость проекции  $\pi_4$ , расположив ее параллельно линии пересечения плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$ . С этой целью ось  $X_1$  проводим параллельно  $M'N'$  ( $X_1 \parallel M'N'$ ).

В системе  $X_1 \frac{\pi_1}{\pi_4}$  линия  $M'N'$  является горизонтальной проекцией фронтали. Фронтальную проекцию фронтали  $M^{IV}N^{IV}$  строим с учетом неизменности координат  $Z_M$  и  $Z_N$ , взятых в системе  $X \frac{\pi_2}{\pi_1}$ .

- 3 Отмечаем новые точки схода следов плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$  на оси  $X_1$ :  $X_{1\alpha} = h'_{0\alpha} \cap X_1$ ,  $X_{1\beta} = h'_{0\beta} \cap X_1$ .
- 4 Через точки  $X_{1\alpha}$  и  $X_{1\beta}$  строим новые фронтальные следы плоскостей:  $f^{IV}_{0\alpha} \parallel f^{IV}_{0\beta} \parallel M^{IV}N^{IV}$ , поскольку в системе  $X_1 \frac{\pi_1}{\pi_4}$  линией пересечения плоскостей является общая фронталь (см. часть 1, раздел 7.3).

- 5 Для преобразования плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$  в горизонтально-проецирующие относительно плоскости проекций  $\pi_5$ , проводим ось  $X_2$  перпендикулярно полученным ранее новым фронтальным следам  $f_{0\alpha}^{IV}$  и  $f_{0\beta}^{IV}$  ( $X_2 \perp f_{0\alpha}^{IV}$  и  $f_{0\beta}^{IV}$ ).
- 6 В точках пересечения фронтальных следов  $f_{0\alpha}^{IV}$  и  $f_{0\beta}^{IV}$  с осью  $X_2$ , отмечаем точки схода следов в системе  $X_2 \frac{\pi_4}{\pi_5}$ :  $X_{2\alpha} = f_{0\alpha}^{IV} \cap X_2, X_{2\beta} = f_{0\beta}^{IV} \cap X_2$ .
- 7 В системе  $X_2 \frac{\pi_4}{\pi_5}$  строим новую горизонтальную проекцию линии пересечения плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$ . С учетом неизменности координат  $Y_M = Y_N$ , измеренных в системе  $X_1 \frac{\pi_1}{\pi_4}$ , эта проекция вырождается в точку  $M^V \equiv N^V$ .
- 8 Через точки схода следов  $X_{2\alpha}$  и  $X_{2\beta}$  и точку  $M^V \equiv N^V$  проводим новые горизонтальные следы  $h_{0\alpha}^V$  и  $h_{0\beta}^V$ .
- 9 Поскольку эти следы являются проецирующими относительно плоскости  $\pi_5$ , то и угол  $\varphi$  между этими следами является истинной величиной угла между заданными плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ .

## Литература

- 1 Гордон, В.О. Курс начертательной геометрии: учеб. пособие/ О.В.Гордон, М.А. Семенцов-Огиевский. – 27-е изд, стер. -М.: Высш. шк., 2008. -272с.
- 2 Елкин, В.В. Инженерная графика: учеб. пособие для студ. высш. учеб.заведений /В.В. Елкин, В.Т. Тозик. - М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 304 с. (ЭБ).
- 3 Талалай, П.Г. Начертательная геометрия. Инженерная графика. Интернет-тестирование базовых знаний: Учеб. пособие/ П.Г. Талалай СПб.: Лань – 2010. – 256с.
- 4 Гнилуша, И.И. Алгоритмы решения типовых задач начертательной геометрии Часть 1,,: учебное пособие/ И.И. Гнилуша, В.А. Люторович, Д.Л. Кириллов. – СПб.: издательство СПбГТИ(ТУ), 2016. - 72 с.
- 5 Тарасов, Б.Ф. Начертательная геометрия: учебник/ Б.Ф. Тарасов, Л.А. Дудкина, С.О. Немолотов. — СПб.: издательство «Лань», 2012. — 256 с.
- 6 Люторович, В.А. Начертательная геометрия. Часть 1 Позиционные задачи: учебное пособие /В.А. Люторович, Е.Н. Булина. – СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2017 – 62 с.

## Содержание

1	Общие сведения о преобразовании ортогональных проекций .....	4
2	Метод вращения .....	5
2.1	Вращение вокруг осей, перпендикулярных плоскостям проекций.....	5
2.2	Вращение вокруг осей, параллельных плоскостям проекций (вращение вокруг линий уровня).....	8
2.3	Вращение плоскости вокруг одного из следов. Метод совмещения .....	13
3	Метод перемены плоскостей проекции (ППП) .....	16
3.1	Определение истинной длины отрезка методом ППП .....	20
3.2	Построение новых проекций плоскости общего положения методом ППП .....	22
3.3	Определение кратчайших расстояний между геометрическими элементами .....	28
4	Определение истинных величин линейных углов .....	39
4.1	Определение угла между двумя прямыми.....	39
4.2	Определение угла между прямой и плоскостью.....	42
4.3	Определение угла между двумя плоскостями .....	45
	Литература .....	51

Кафедра инженерного проектирования

Учебное пособие

## **Начертательная геометрия**

Готовимся к экзамену

Часть 2. Позиционные задачи.

Владимир Александрович Люторович

Игорь Иванович Гнилуша

Екатерина Николаевна Булина

---

Отпечатано с оригинал- макета. Формат  $60 \times 90 \frac{1}{8}$

Печ. л.7,0 Тираж экз. Заказ №

---

Санкт- Петербургский государственный технологический институт  
(технический университет)

---

190013, Санкт-Петербург, Московский пр.,26  
Типография издательства СПбТИ(ТУ)